

Физико·

Математическое

Наследие

И. Н. Веселовский

# ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ



Физика

История физики



URSS

**И. Н. Веселовский**

# **ОЧЕРКИ ПО ИСТОРИИ ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ**

Рекомендовано  
Министерством высшего и среднего  
специального образования СССР

Издание второе



**URSS**  
**МОСКВА**

**Веселовский Иван Николаевич**

**Очерки по истории теоретической механики. Изд. 2-е.**

М.: Издательство ЛКИ, 2010. — 288 с. (Физико-математическое наследие: физика (история физики).)

Предлагаемая вниманию читателей книга известного отечественного математика И. Н. Веселовского написана на основе лекций, прочитанных автором на факультете повышения квалификации преподавателей теоретической механики в МВТУ им. Н. Э. Баумана. В ней изложены очерки по истории теоретической механики и ее основным понятиям за время от Аристотеля до Эйнштейна. Особое внимание обращено на связь теоретической механики со смежными науками, а также с развитием техники и экономики общества в различные исторические эпохи.

Книга предназначена для преподавателей теоретической механики, студентов технических вузов, а также для всех интересующихся историей физико-математических наук.

**Рецензент:**

профессор М. М. Гернет

(Московский институт пищевой промышленности)

Издательство ЛКИ. 117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 9.  
Формат 60×90/16. Печ. л. 18. Зак. № 3055.

Отпечатано в ООО «ЛЕНАНД».

117312, Москва, пр-т Шестидесятилетия Октября, 11А, стр. 11.

**ISBN 978-5-382-01025-0**

© И. Н. Веселовский, 1974, 2009

© Книжный дом «ЛИБРОКОМ»,  
оформление, 2009

|                                                                                                   |                                                              |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------|--------------------------------------------------------------|
| НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА                                                                      |                                                              |
| <br><b>URSS</b> | E-mail: <a href="mailto:URSS@URSS.ru">URSS@URSS.ru</a>       |
|                                                                                                   | Каталог изданий в Интернете:                                 |
|                                                                                                   | <a href="http://URSS.ru">http://URSS.ru</a>                  |
|                                                                                                   | Тел./факс: 7 (499) 135-42-16<br>Тел./факс: 7 (499) 135-42-46 |

8134 ID 109110



Под теоретической механикой понимается механика, основанная на трех законах Ньютона; по существу, она совпадает с дисциплиной, читаемой в высших учебных заведениях. В нее не входят механика сплошной среды, требующая для своего обоснования некоторых дополнительных аксиом, а также аналитическая механика, общая теория колебаний, гироскопия, общая теория механизмов и некоторые другие специальные дисциплины, которые «выросли на стволе теоретической механики» и совокупность которых составляет механику вообще.

Основными понятиями теоретической механики являются понятия о движении и силе; поэтому в истории теоретической механики необходимо показать зарождение этих понятий во времена Аристотеля, их утверждение в эпоху Ньютона и ту форму, которую они приняли в начале XX в.

История теоретической механики является частью истории науки. Самое общее определение истории можно сформулировать так: история есть описание причинного процесса, происходящего во времени. История должна восстановить прошедший уже процесс на основании тех следов, которые он оставил. Поэтому первым делом историка является критическое отношение к сохранившимся источникам — литературным или материальным.

В истории науки законы, установленные в прошлые века, нельзя понимать в том смысле, который они имеют в настоящее время. Возьмем небольшой пример. Известно, что Архимед дал определение центра тяжести. Для современного исследователя центр тяжести представляется как точка, в которой приложен вектор силы веса данного тела, или точка, через которую должны проходить линии действия равнодействующих весов всех частиц тела при различных положениях его относительно вертикали. В то время такое определение центра тяжести было бы непонятным по той причине, что тогда не существовало понятие о силе как о векторе, с которым можно производить простейшие действия. Нужно было подождать до XVII в., когда представление о силе как о величине, имеющей направление, стало общераспространенным, и даже до середины XIX в., когда такая величина получила название вектора.

Модернизировать древние научные понятия очень опасно, и вместе с тем через эту стадию нужно пройти. Зная современное положение данной науки, необходимо отвлечься от него и представить, какие положения существовали по этому предмету у древних.

Для правильного изложения истории науки необходимо хорошо знать состояние материальной и социальной среды, в которой действовал ученый; для этого нужно хорошо понимать общую историю рассматриваемой эпохи. Если историк будет только считать, что Древняя Греция представляла идеал гармонии и красоты, Средневековье было темной эпохой, в которой религиозные представления не позволили развиваться науке, а эпоха Возрождения дала необычайные идеалы гуманизма и великие свершения в науке и искусстве, то трудно ожидать, что он может добиться каких-либо важных результатов в своих исследованиях.

Исследователь должен знать состояние не только своей специальной науки, но и общей философской и научной среды того времени. В частном случае для изложения истории механики необходимо знать состояние техники, математики и астрономии. Техника давала основы для формулировки и уточнения понятия о силе, астрономия от Евдокса до Лапласа ставила задачи, которые нужно было решать, а математика давала методы, которыми можно их решать. Не во все времена роли трех этих факторов были одинаково важны, но ни одним из них нельзя пренебречь.

В этой книге воспроизведены лекции, которые читал автор в 1968—1970 гг. на факультете повышения квалификации преподавателей механики в Московском высшем техническом училище им. Н. Э. Баумана.

При подготовке книги к изданию большую помощь оказали профессор М. М. Гернет, давший подробную рецензию на представленную рукопись, а также профессора Н. Н. Поляхов, В. Н. Щелкачев и А. А. Яблонский, прочитавшие рукопись в ее первом варианте, которым автор выражает глубокую благодарность.

*Автор*

Как уже известно из предисловия, история теоретической механики является разделом общей истории науки — отрасли знания, которая получила значительное развитие в первой половине XX в. Ее появление связано с углублением исторической науки, которая из описания подвигов монархов и внешних войн стала превращаться в историю общества и происходящих в нем процессов.

«Внутренняя» история государства, называвшаяся так в противоположность «внешней», начала получать доминирующее значение в XVIII в. — в эпоху Просвещения, когда политическая мысль искала решения жизненных вопросов общества в хороших законах\*.

Исторические исследования все более и более направляются в сторону изучения государственных учреждений или законов («Дух законов» Монтескье).

В XIX в. положение значительно изменилось: движущие силы общественного развития стали искать гораздо глубже — в экономике. Но экономика интересуется изучением общественных отношений, возникающих на почве производственных процессов; сами эти процессы, имеющие главным образом технологический характер, для историка экономики являются уже данными. Экономист может, конечно, сравнивать результаты различных процессов, но создавать эти процессы он не может; их создание и разработка являются уже делом техника.

Поэтому наряду с политической и экономической историей общества в начале XX в. стала возникать новая отрасль науки — история материальной культуры. Так как технология производства требует научной основы, то наряду с историей техники в качестве необходимой составной части в историю материальной культуры входит и история науки.

Взаимное отношение между техникой и наукой существует несомненно, но формы его очень многогранны и не являются еще

---

\* Это отразилось и в научной терминологии: большинство положений, установленных опытным или теоретическим путем в физико-математических науках, получило названия законов (законы Ньютона, закон Бойля — Мариотта и т. д.); философы эпохи Просвещения считали, что природа, как и общество, должна повиноваться некоторым законам.

вполне исследованными. Развитие науки неразрывно связано с развитием техники. Одно время среди историков бытовала теория социального заказа; движущую силу развития науки видели только в технике и для каждого научного открытия подыскивали соответствующий технический процесс.

Для того чтобы правильно изложить историю теоретической механики, необходимо знать историю и других наук, прежде всего физико-математических, начиная с древнейших времен.

# Часть I

## АНТИЧНАЯ МЕХАНИКА

---

### МЕХАНИКА КЛАССИЧЕСКОЙ ГРЕЦИИ. ДВА ВИДА ДВИЖЕНИЯ: ЕСТЕСТВЕННОЕ И НАСИЛЬСТВЕННОЕ. АРИСТОТЕЛЬ И ПАРАЛЛЕЛОГРАММ СКОРОСТЕЙ

Простейшее определение науки можно сформулировать так: наука есть систематическое собрание теоретических положений и практических методов исследования заданного предмета или совокупности предметов. Отсюда следует, что изложение истории науки можно начинать с появления письменных трактатов, касающихся этой науки. Однако могут быть и исключения: например, основные сочинения по религии и философии индийцев долгое время передавались устно без какой-либо записи; то же самое наблюдалось и в Европе, где священные книги галльских друидов выучивались наизусть, вследствие чего полная система их религиозных и философских представлений осталась неизвестной; однако эти исключения лишь подтверждают правило.

В этом отношении история науки отличается от истории техники, в которой материальные памятники имеют доминирующее значение. Можно изучать технику Древнего Египта, Вавилона, даже технику эпохи палеолита, но для изучения истории науки решающую роль играют письменные памятники.

Если так, то следует признать, что теоретическая механика начала развиваться в Греции. Слово *μηχανή* (*mechanê*) первоначально употреблялось как название подъемных машин, которые в греческих театрах опускали и поднимали актеров, изображающих богов; отсюда пошло хорошо известное выражение *deus ex machina* — бог из машины. Это показывает, что теоретическая механика возникла в Греции в V в. до н. э. одновременно с появлением в театре греческой трагедии Эсхила, Софокла и Еврипида. На первый взгляд может показаться странным, что такая строгая наука получила свое начало в театре; нужно, однако, отметить, что это произошло не только с механикой: другая, не менее строгая наука — оптика — родилась тоже в театре — в связи с необходимостью писать декорации требовалась теория перспективы.

Объяснить это можно тем, что основой античной культуры было рабовладение; в Риме рабский труд применялся в сельском хозяйстве (в больших фермах — латифундиях), а в Греции — в промышлен-

ности; рабы работали в мастерских. Изобретать машины для увеличения производительности труда не было смысла: рабам давали самые грубые и дешевые инструменты, а повышение производительности труда достигалось при помощи других мер.

Немного позже слово *teschanê* получило и другое значение: так стали называться военные машины. В дальнейшем после возникновения Римской империи слово *teschane*, или *machina*, стало употребляться для обозначения всякого производственного приспособления, где при помощи малой силы требовалось получить большую.

Здесь имеется характерное отличие античной техники от современной. В настоящее время используются мощности в десятки тысяч лошадиных сил, но при этом экономятся материалы, мировые запасы полезных ископаемых подсчитаны.

В Греции положение было обратное: двигателями были люди и животные, наибольшей мощностью была одна слоновья сила, да и то слоны применялись только в военном деле; зато материала греки имели для своих потребностей вполне достаточно.

О греческой динамике можно составить полное представление из следующих сочинений *Аристотеля* (374—322 гг. до н. э.): «Физика», «О небе», «О возникновении и уничтожении», «О метеорах» и отчасти «Метафизика». Что касается так называемых «Механических проблем», то они вышли из аристотелевской школы, но вряд ли они принадлежат самому Аристотелю.

Аристотель под движением (*kinesis*) понимал изменение вообще, различая количественные и качественные изменения, а также изменения в отношении места, которые составляют то, что теперь называют механическими движениями. Кроме этого, Аристотель называл движением переход из одного состояния в другое, например «из бытия в небытие», из здоровья в болезнь и обратно. Эта направленность из чего-нибудь во что-нибудь — определение начала и конца цели — была характерной для философии Аристотеля.

Для нас существенным является направление движения, для греков же — начальная и конечная точки. Это относится не только к философии: в греческой геометрии прямой называется то, что сейчас определяется как отрезок. Греки понимали, что такое бесконечность, но пользоваться ею избегали.

В механике определение движения по начальной и конечной точкам приводило к некоторым неудобствам: круговое движение Аристотель определял как движение из чего-нибудь в то же самое и специально подчеркивал, что круговое движение едино. Поэтому механики-практики, например Герон, рассматривая движение зубчатых колес, прибегали к таким описательным выражениям: колесо, в котором верхняя половина движется слева направо, а нижняя — справа налево, и т. д.

В астрономии различались движения: в направлении последовательности знаков зодиака (видимое движение планет по небесному своду) и против последовательности знаков (суточное вращение неба, объясняющее восход и заход светил). Но небо у греков было

резко отделено от Земли; нижний, подлунный мир был местом возникающего и уничтожающегося, подверженного переменам, тогда как верхний, надлунный мир был вечным, совершенным и неизменяемым. Различие между обоими мирами замечалось и в характере движений.

Греки различали два вида движений: естественные и насильственные. Естественные движения происходили сами собой без вмешательства посторонней силы (их можно назвать инерционными); насильственные же движения требовали некоторого двигателя. Естественные движения представляли стремления тел занять свое «естественное место»; для тяжелых тел таким местом была Земля; выпущенный из рук камень падал вниз сам по себе, а для сообщения ему движения вверх надо было приложить какую-то силу.

С другой стороны, огонь, например, обладал естественным движением вверх, а чтобы сбить его вниз, нужно было приложить некоторые усилия. Это естественное стремление получило название *φωτή* (корень *φελ*), а выражающий это движение глагол (в неопределенной форме *φελειν*) — рыпаться; по-польски *guch* — движение (одинаковый корень со словом «рушиться»). Так как в подлунном мире все является преходящим, то и естественные движения должны были иметь начало и конец — быть прямолинейными. В надлунном же мире, где все является вечным и неизменным, должны быть вечными и естественные движения, иными словами, они должны быть равномерными круговыми.

Понятие *φωτή* соответствует нашему понятию об инерции, или силе инерции, в том смысле, как ее понимал Ньютон, а также большинство людей, не очень знакомых с теоретической механикой. Однако современные понятия об инерции значительно отличаются от тех, которые имелись у древних греков. Для нас понятие об инерции тесно связывается с прямолинейным и равномерным движением; когда движущееся равномерно тело встречает препятствие, то инерция уступает место действовавшим на тело силам. У греков же, наоборот, *φωτή* начинало проявлять себя именно, когда движущееся тело встречало препятствие. Если какая-либо точка тела оказывалась неподвижной, то инерция остальных точек заставляла их продолжать свое движение, иными словами, вращаться вокруг неподвижной точки.

Таким образом, *φωτή* проявлялась в виде вращающего момента. Если *φωτή* различных точек взаимно нейтрализовались, то тело останавливалось; наступало состояние, которое теперь называют равновесием, а греки называли *ισορρομία*, что можно перевести как равномоментность.

В настоящее время закрепленную точку, вызывающую равновесие, называют центром тяжести и рассматривают как точку приложения равнодействующей всех сил тяжести отдельных точек тела;

греки называли ее  $\kappa\epsilon\upsilon\tau\rho\omicron\nu \tau\eta\varsigma \rho\omicron\lambda\eta\varsigma$  (центром моментов); название  $\kappa\epsilon\upsilon\tau\rho\omicron\nu \tau\omicron\upsilon \beta\alpha\rho\omicron\upsilon\varsigma$  (центр тяжести) появилось позднее, так как  $\rho\omicron\lambda\eta$  считалась пропорциональной весу тела, Центр тяжести у греков определялся как точка, при закреплении которой тело оставалось неподвижным во всяких положениях.

Дальнейшей задачей исследования было определение величины  $\rho\omicron\lambda\eta$  численно. Греки в своих теоретических исследованиях шли несколько иным путем: они говорили не о числовом значении, а о равенстве, или пропорциональности, двух значений одной и той же величины. Для  $\rho\omicron\lambda\eta$  эта задача была решена Архимедом, который показал, что  $\rho\omicron\lambda\eta$  двух материальных точек весом  $P$  и  $Q$  одинаковы, если их расстояния  $a$  и  $b$  до закрепленной точки обратно пропорциональны соответствующим весам:

$$Pa = Qb.$$

На практике это равенство давало условие равновесия рычага.

Следующей задачей, которую поставил и для отдельных случаев решил Архимед, было определение центра моментов, или тяжести, плоских фигур. Совокупность этих исследований дала прочную базу для исследования работы машин, основанных на принципе рычага (вóротов, блоков, полиспастов и т. д.), но не могла решить вопроса относительно работы машин, основанных на принципе наклонной плоскости (клин, винт и т. п.). Эта задача была решена значительно позже, в XIII в., и уже на основании других принципов, которые были связаны с другим понятием о силе, а именно о силе, производящей насильственные движения.

Эту силу Аристотель назвал  $\delta\upsilon\lambda\alpha\mu\iota\varsigma$  (dynamis) и определил ее так. Если  $A$  — движущее,  $B$  — движимое,  $\Gamma$  — длина, на которую оно продвинуто,  $\Delta$  — время, в течение которого оно двигалось, то в такое же время сила, равная  $A$ , продвинет половину  $B$  на двойную длину  $\Gamma$ , а на целую  $\Gamma$  — в половину времени  $\Delta$ ; такова пропорция. Кроме того, считалось, что «двигатель» и «движимое» находились в непосредственном соприкосновении.

В современных терминах формулу Аристотеля можно выразить так:

$$F = k \frac{PL}{T},$$

где  $F$  — (у Аристотеля  $A$ ) — сила,  $P$  — вес движимого тела,  $L$  и  $T$  — длина и время движения,  $k$  — отсутствующий у Аристотеля коэффициент пропорциональности.

Строго говоря, у Аристотеля величину  $P$  можно понимать и как сопротивление, но поскольку реальными сопротивлениями были вес поднимаемого тела или пропорциональная весу сила трения, то при

наличии коэффициента пропорциональности  $k$  можно полагать величину  $B$  равной весу  $P^*$ .

Если обратить внимание на размерность величин, входящих в формулу Аристотеля, то станет ясным, что его понятие *dynamis* имеет размерность мощности. Это станет очевидным, если учесть, что греческое слово *dynamis* переводится латинским *potentia*, которое в свою очередь соответствует французскому *puissance*, т. е. мощности.

Определение Аристотеля вполне соответствовало уровню техники, когда движущая сила получалась от живых двигателей — рабов или животных. Для перевозки вдвое более тяжелого груза или для получения вдвое большей скорости требовалось и двойное количество животных. Такое понимание до сих пор соответствует термину «лошадиная сила».

Однако в определении Аристотеля имелся очень большой недостаток. Если отношение пройденной длины  $L$  ко времени  $T$  заменить измеряемой этим отношением скоростью  $v$ , то формула Аристотеля примет вид

$$F = kPv.$$

Очевидно, что если  $F = 0$ , то и  $v = 0$ , и обратно. Но не всегда при  $v$ , не равном нулю,  $F = 0$ . Были явления, которые заставляли Аристотеля задумываться над тем, какая сила заставляет двигаться стрелу; выпущенную из лука? В этом случае еще можно было предположить, что спущенная тетива возмущает воздух, который потом и несет стрелу (так называемая теория антиперистасиса), но «кабинетность» этого объяснения чувствовалась очень сильно. Можно даже сказать, что, когда Аристотель писал свою формулу, она уже не соответствовала действительному положению вещей.

Что же было основной причиной этого изменения? Ее следует искать, конечно, не в каком-нибудь промышленном перевороте, маловероятном в рабовладельческом обществе; он произошел совсем в другой области, а именно в военном деле.

Положение Греции в пору ее наибольшего расцвета — в середине V в. до н. э. — достаточно хорошо известно. В 431 г. началась описанная Фукидидом Пелопоннесская война, сыгравшая в истории Греции очень важную роль. Греческие войска в ту эпоху составлялись из граждан, которые должны были вооружаться и кормиться за свой счет. Походы не были особенно продолжительными, а самое главное — греки не очень умели брать города.

В ходе этой войны Афины решили завоевать Сицилию, но их поход (415—413 гг. до н. э.) оказался неудачным; главный город Сицилии Сиракузы отстоял свою свободу. Через четыре года после отражения афинян Сицилии стала грозить опасность с другой сто-

---

\* В связи с этим следует отметить, что Мах вышеописанную формулу Аристотеля по образцу ньютоновой выражал так:

$$F = mv.$$

Неправильность такой формулировки очевидна из того, что у Аристотеля отсутствует знак равенства и, конечно, не было представления о массе.

роны — от карфагенян. Карфаген представлял государство другого типа, обладавшее развитой промышленностью.

В 409 г. до н. э. в Сицилии высадился карфагенский полководец Ганнибал, использовав большое количество кораблей, на которых доставлялись осадные машины, стрелы и другие запасы. Благодаря применению техники он разрушил и завоевал многие сицилийские города.

В 405 г. до н. э. в Сиракузах Дионисий Старший начинает готовиться к войне. Во время этой подготовки он объявляет первую в мировой истории мобилизацию промышленности. Он собрал техников (*τεχνίταις*) из подчиненных ему городов, из Италии и Греции, из мест, подчиненных Карфагену, привлекая их большим жалованьем. Зная, что война будет тяжелой и продолжительной, он задумал приготовить в изобилии вооружения и разнообразные метательные орудия и, кроме того, корабли с четырьмя и пятью рядами весел (тетеры и пентеры), которые в то время еще не были в употреблении.

Стандартным судном в Греции V в. до н. э. была триера (у римлян — трирема) — судно с тремя рядами весел.

В то время было открыто искусство строить катапульты в Сиракузах, где были собраны сильные инженеры. Они изобрели многие виды метательных машин и новых орудий.

В 397 г. Дионисий снова начал войну с карфагенянами. Ему удалось остановить успехи карфагенян, но полностью изгнать их из Сицилии он не смог: карфагеняне оставались на западе острова еще около полутораста лет.

После этого новые изобретения перешли и в Восточную Грецию; следующий, IV век до н. э. был временем наемных войск и совершенствования военной техники. Особенного расцвета эта техника достигла в войсках Филиппа и Александра Македонских. Учитель Александра Македонского — Аристотель ничего не писал о военной технике. В науке он был биологом, естественником; в математике он разбирался достаточно хорошо (его логические сочинения воспроизводят в большой степени методику греческих математиков того времени), но творческим математиком он не был.

Но можно назвать одного человека, который был и математиком, и инженером, и мог иметь некоторое отношение по крайней мере к теоретической разработке новой техники. Он был автором первого, хотя и не дошедшего до нас, труда по механике. Это был Архит Тарентский, живший примерно около 400 года, пифагореец и друг Платона. Он решил знаменитую делийскую задачу об удвоении куба при помощи необыкновенно остроумного стереометрического построения.

Птолемей называл его крупнейшим пифагорейским теоретиком музыки. Он размышлял также относительно взаимной связи наук и физической природы звука. Он был первым, кто дал систематическую разработку механики на математических основаниях. Согласно Витрувию (автору труда «Об архитектуре») он писал о машинах и даже сам строил машины.

Для истории теоретической механики особенно интересно решение задачи об удвоении куба. Первоначально эта задача была чисто математической и появилась, когда встал вопрос об измерении величин. Естественный ход таков: определенная величина берется за единицу, затем строится другая, которая была бы в два раза больше первой, дальше получаются величины соответственно в три, четыре и т. д. раз больше, что позволяет построить шкалу для натурального ряда величин. Для длин это производится без затруднений, но при измерении площадей после выбора квадрата, площадь которого принималась за единицу, следовало построить квадрат вдвое большей площадью. Эта задача была решена пифагорейцами при помощи средней пропорциональной: если сторона квадрата единичной площадью равна  $a$ , то сторона искомого квадрата получится из пропорции:

$$a : x = x : 2a,$$

откуда

$$x^2 = 2a^2 \text{ и } x = a\sqrt{2}.$$

Это привело к открытию несоизмеримости  $\sqrt{2}$ .

Следующая стадия — измерение объемов — требовала умения построить куб, объем которого был бы в два раза больше объема куба, принятого за единицу. Гиппократ Хиосский (середина V в.) показал, что эта задача может быть решена при помощи двух средних пропорциональных:

$$a : x = x : y = y : 2a,$$

но практически задача оставалась нерешенной.

Значение ее Эратосфен характеризует так, что после ее решения можно вообще любой заданный объем, ограниченный прямоугольниками, превращать в куб, одну форму преобразовывать в другую, делать подобной и увеличивать, сохраняя подобие. Это изобретение будет полезно и для желающих увеличить размеры катапульт и камнеметов, так как для увеличения длины броска нужно пропорционально увеличить все: и ширину, и величину отверстия, и втулки, и вставляемые тяжи, а этого нельзя сделать без нахождения средних пропорциональных.

Теперь известно, что для увеличения вдвое дальности полета снаряда в движении по параболической траектории нужно вдвое увеличить его начальную кинетическую энергию, а так как потенциальная энергия упругого тела при одинаковых напряжениях пропорциональна его объему, то для указанной цели требовалось удвоение объема тяжа.

Решение, данное Архитом, представляет большой интерес и с точки зрения механики; можно сказать, что Архит был одним из первых, кто ввел движение в решение геометрических задач\*.

Практическое выполнение его построения представляло затруднения; поэтому в дальнейшем многие математики занимались на-

\* С решением Архита можно познакомиться у Ван-дер-Вардена в его книге «Пробуждающаяся наука». (Физматгиз. 1958, стр. 209. Изд. 4. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2010).

хождением более удобных решений; одно из них приведено в «Механике» (а также в «Баллистике») Герона Александрийского, что еще раз показывает важность этой задачи и для механики.

Оказалось непригодным и данное Аристотелем определение силы как мощности, так как рассуждение о полете стрелы, поддерживаемой воздухом, никак не могло годиться к объяснению полета камня, выброшенного из катапульты.

Новое определение силы в эллинистическую эпоху (II—I вв. до н. э.) можно восстановить только по цитатам. В частности, оно имелось в сочинениях комментатора Аристотеля Александра Афродизского (около 200 г. н. э.), который заимствовал его у знаменитого астронома Гиппарха (около 150 г., до н. э.). Александр Афродизский был известен Галилею, который упоминает об этом определении в своем юношеском сочинении «О движении».

Согласно этому определению движущееся тело в момент начала движения получает некоторую движущую силу, которая и поддерживает движение (итальянские механики конца средневековья называли эту силу *impeto* — импульс); когда эта сила иссякает, то движение прекращается.

Эллинистическое определение силы соответствует термину «живая сила», или «работа». Из аристотелевской формулы новое определение получается, если зачеркнуть время  $T$  в знаменателе. Тогда определение силы будет иметь вид

$$F = PL.$$

Такое определение силы было и у Декарта, который измерял силу произведением веса поднимаемого тела на высоту его поднятия.

Из простейших машин греки хорошо знали лишь теорию действия рычага, которая и составляет основное содержание приписываемых Аристотелю «Механических проблем». Данное в этом произведении доказательство закона рычага содержит некоторые моменты, очень важные для дальнейшего развития механики.

Основную причину действия рычага автор «Механических проблем» находит в том, что во вращении точки; более удаленные от оси, движутся быстрее, чем точки, менее удаленные (§ 1).

Причиной этих явлений является то, что описывающая круг точка участвует в двух перемещениях. Если бы эти перемещения находились в каком-нибудь отношении, то движущаяся точка пошла бы по прямой, и эта прямая будет диагональю фигуры, образованной двумя составленными вместе прямыми, находящимися в том же отношении (рис. 1).

Пусть отношение прямых, по которым перемещается движущаяся точка, будет такое, какое  $AB$  имеет к  $AG$ , и пусть прямая  $AG$  движется к точке  $B$ , а линия  $AB$  переносится к  $HG$ ; пусть точка  $A$  дойдет до  $\Delta$ , а линия  $AB$  до  $E$  ( $EF$ ). Если перемещения имеют отношение, как у линий  $AB$  и  $AG$ , то необходимо, чтобы то же самое отношение имели бы и отрезки  $\Delta\Delta$  и  $AE$ . Следовательно, малый параллелограмм подобен большому и оба они имеют одну и ту же диагональ, а точка  $A$  окажется в  $H$ .

Такое же доказательство можно привести и для случая, когда движение прекратится в любой другой точке; точка  $A$  все время будет находиться на диагонали.

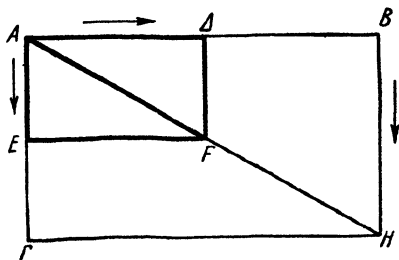


Рис. 1

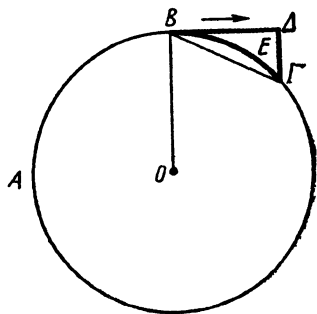


Рис. 2

Выше приведено доказательство параллелограмма перемещений; если скорость равномерного движения равна пути, пройденному в определенное время, то можно считать, что имеется параллелограмм скоростей.

Древние греки знали параллелограмм скоростей по крайней мере для прямолинейных равномерных движений. Как указывается в «Механических проблемах», если бы точка имела два перемещения, ни в какое время не находящиеся ни в каком отношении (иными словами, несоизмеримые), то невозможно, чтобы окончательное перемещение было прямолинейным.

Действительно, пусть перемещение будет прямолинейным. Тогда, если взять его как диагональ и дополнить стороны, то движущаяся точка будет перемещаться в отношении сторон, ибо это уже доказано ранее. Следовательно, движение, не находящееся ни в каком отношении, ни в какое время не произведет прямой. Действительно, если бы точка в течение некоторого времени двигалась в некотором отношении, то согласно вышесказанному ее перемещение было бы прямолинейным. Таким образом, если два перемещения не находятся ни в какое время ни в каком отношении, то движущаяся точка окажется перемещающейся криволинейно.

Из этого ясно, что точка, описывающая круг, имеет одновременно два перемещения и что, двигаясь по прямой, она попадает на перпендикуляр, так что эта прямая окажется перпендикулярной к радиусу. Пусть будет (рис. 2) круг  $ABГ$  и пусть точка  $B$  движется к  $\Delta$ ; по кругу она когда-нибудь достигнет точки  $Г$ . Если бы она перемещалась в отношении  $B\Delta$  к  $\Delta Г$ , то она двигалась бы по диагонали  $BГ$ . Поскольку между  $B\Delta$  и  $\Delta Г$  никакого отношения нет, то она будет перемещаться по дуге  $BEГ$ . Совершенно очевидно, что перемещения отрезков  $B\Delta$  и  $BГ$  никак не могут быть соизмеримыми, иначе движение происходило бы по хорде  $BГ$ ; в действительности же движение происходит по дуге  $BEГ$ .

Если отрезок  $BA$  будет бесконечно малым первого порядка, то  $AG$  окажется бесконечно малым второго порядка, так что указанные отрезки являются несоизмеримыми. Можно отказаться от предположения о бесконечной малости; в таком случае разговор может идти о так называемых неархимедовых величинах, классическим примером которых являются криволинейные углы, т. е. углы, заключенные между прямой и окружностью, в частности между окружностью и касательной к ней.

Следы употребления криволинейных углов имеются у Евклида (определение «угла сегмента» в книге III «Начал»). В дальнейшем развитии греческой геометрии углы между прямой и окружностью были отброшены, по всей вероятности, именно по той причине, что являлись «неархимедовыми» величинами, несоизмеримыми с прямолинейными углами.

Отметим, что схема (рис. 2) была исходной для Гюйгенса, когда он выводил формулу, приведшую к определению нормального ускорения.

## АРХИМЕД. МЕХАНИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОЩАДЕЙ, ОБЪЕМОВ И ЦЕНТРОВ ТЯЖЕСТИ

Архимед был человеком такого возвышенного образа мыслей, такой глубины души и богатства познаний, что о вещах, доставивших ему славу ума не смертного, а божественного, не пожелал ничего написать, но, считая сооружение машин и вообще всякое искусство, сопричастное к повседневным нуждам, низменным и грубым, все свое рвение обратил на такие занятия, в которых красота и совершенство пребывают не смешанными с потребностями жизни. И нельзя не верить рассказам, будто он был тайно околдован некоей сиреной, не покидавшей его ни на миг, а потому забывал о пище и об уходе за телом. Он совершил множество замечательных открытий, но просил друзей и родственников поставить на его могиле лишь цилиндр с шаром внутри и написать расчет соотношения их объемов.

Архимед не придавал большого значения всем сооруженным им машинам, он рассматривал их лишь как простые геометрические игрушки, которыми он занимался в свободное время, и то большей частью по настоянию царя Гиерона, постоянно направлявшего его занятия от чисто интеллектуальных предметов к материальным вещам\*.

В минуту опасности, грозящей родному городу, Архимед смог выйти из своего «кабинета» и отдать все силы его защите.

Все это настолько красиво, что невольно возникает вопрос: «А верно ли это? Не является ли это легендой, создавшейся вокруг Архимеда?». А что такие легенды действительно создавались, можно видеть тоже из весьма распространенного объяснения того, каким образом Архимед открыл носящий его имя закон: всякое тело,

\* См.: Плутарх. Сравнительные жизнеописания, т. I. М., Изд-во АН СССР, 1961, стр. 393—394.

погруженное в жидкость, теряет в своем весе столько, сколько весит жидкость в объеме этого тела. Это объяснение основывается на следующем рассказе римского архитектора Витрувия.

«Когда Гиерон, достигший царской власти в Сиракузах, после удачного завершения своих походов, решил по обету бессмертным богам поместить в одном из храмов богатый венец, он заказал сделать его за определенную плату и отвесил нужное количество золота подрядчику. В назначенный по договору срок тот доставил царю тонко исполненную работу, в точности, видимо, соответствовавшую весу отпущенного на нее золота.

После же того, как царь узнал о том, что часть золота была утаена и при изготовлении венца в него было примешано такое же количество серебра, он, негодуя на нанесенное ему оскорбление и не находя способа доказать эту покражу, обратился к Архимеду с просьбой взять на себя разрешение этого вопроса.

Случилось так, что в то время как Архимед думал над этим, он, садясь в ванну, заметил, что чем глубже он погружается в нее своим телом, тем больше через край вытекает воды. Эта идея послужила ему способом разрешения его вопроса, и он, не медля, вне себя от радости, выскочил из ванны и бросился к себе домой, громко крича, что нашел то, что искал, ибо на бегу он то и дело восклицал по-гречески «эврика, эврика»\*.

Отметим, что в рассказе Витрувия не упоминается о законе Архимеда. В действительности, как можно видеть из «Метрики» Герона Александрийского (около 100 г. н. э.)\*\*, Архимед считал, что если подлежащее измерению тело удобопереносимо, то нужно сделать прямоугольный сосуд, могущий вместить это тело, наполнить его водой и опустить в него неправильное тело; тогда ясно, что некоторое количество воды выльется так, что какой был объем у опущенного в воду тела, столько воды неостанет в этом вместилище после того, как тело будет из него вынуто.

Если измерить сделавшееся пустым пространство, то можно найти объем опущенного тела, а следовательно, и плотность.

Теперь постараемся представить себе Архимеда освобожденным



*Архимед (3 в. до н. э.)*

\* Витрувий. Десять книг об архитектуре. М., Изд-во Всесоюзной Академии архитектуры, 1936, стр. 171. Изд. 3. М.: КомКнига/URSS, 2005.

\*\* Архимед. Сочинения. М., Физматгиз, 1962, стр. 271.

от выросших легенд. Его ученик Гераклид составил утраченную/теперь биографию своего учителя.

Эта биография была, по-видимому, очень иконописна, так как автор приписал Архимеду даже открытие конических сечений, что никак не может соответствовать действительности. Попробуем восстановить биографию Архимеда, исходя из надежно установленных фактов.

Архимед погиб в 212 г. до н. э. — в год взятия Сиракуз римской армией. Византийский писатель XII в. Цеци сообщает, что он умер 75 лет от роду; на этом основании принято считать, что Архимед родился в Сицилии в 287 г. до н. э. Когда Архимеду было около десяти лет, в Сицилию вторгся знаменитый царь Пирр Эпирский.

В борьбе с Пирром выдвинулся Гиерон, бывший родственником Архимеда, и в 270 г. до н. э. сделавшийся правителем Сиракуз. Первая половина его царствования не была мирной; он втянулся в первую Пуническую войну (264—241 гг. до н. э.), где в союзе с карфагенянами воевал против римлян, но скоро вышел из войны. По окончании войны Сицилия сделалась римской провинцией, Сиракузы еще оставались свободными.

С 241 г. до н. э. начинается мирный период царствования Гиерона, старавшегося поддерживать хорошие отношения как с римлянами, так и с карфагенянами; тем не менее он деятельно готовится к отражению возможных покушений на свободу Сиракуз и усиливает обороноспособность родного города, привлекая к этой работе, как писал Плутарх, и Архимеда.

Таков был фон, на котором развевывалась деятельность Архимеда. Из дошедших до нас полностью сочинений Архимеда рассмотрим следующие.

1. «Квадратура параболы».
2. Две книги «О шаре и цилиндре».
3. «О коноидах и сфероидах».
4. «О спиралях».

Эти сочинения представляют законченную группу посланий, написанных Архимедом к некоему Досифею — ученику Конона Самосского, бывшего кем-то вроде научного руководителя Архимеда и давшего ему программу работ, воплощенную в этих посланиях. Порядок написания этих сочинений вполне устанавливается из сопровождающих их введений.

Первое из этих сочинений было написано к Досифею после смерти Конона. Конон Самосский был известен историкам по следующей легенде. В 246 г. до н. э. египетский властитель Птолемей III Эвергет начал Третью Сирийскую войну и отправился в поход на Антиохию; его супруга Вереника, молясь за благополучное окончание похода, принесла в жертву богам свои волосы. После окончания похода оказалось, что ее волос в храме нет; тогда придворный астроном Конон заявил, что эти волосы были помещены богами на небе и образовали новое созвездие «Волосы Вереники». Это событие было воспето придворным поэтом Каллимахом, вследствие чего и стало известным историкам.

Конон был в действительности очень крупным ученым, оказавшим большое влияние на научное развитие Архимеда, который мог познакомиться с ним в Сицилии, где Конон производил астрономические исследования, или в Александрии во время пребывания там Архимеда.

Второй ученый, с которым Архимед поддерживал переписку, был знаменитый Эратосфен Киренский (285—205 гг. до н. э.), который был приглашен в Александрию в 245 г. Птолемеем Эвергетом для воспитания его сына и наследника Птолемея IV Филопатора. Наиболее удобное время для этого посещения наступило после окончания первой Пунической войны, когда правитель Сиракуз Гиерон мог отпустить Архимеда в Александрию.

Легенда о Веренике важна в том отношении, что в 246 г. до н. э. Конон был жив, следовательно, сочинение «О квадратуре параболы» было написано после этого года. Но в 246 г. Архимеду шел уже 41 год; таким образом, научной работой Архимеду пришлось заняться уже на склоне лет, приближаясь к пятидесятилетнему возрасту. Обычно историки относят смерть Конона к тридцатым годам III в. до н. э.; тогда предположительно можно было бы отнести «Квадратуру параболы» примерно к 235 г. до н. э.

Определим примерное время остальных произведений Архимеда:

5. Две книги «О равновесии плоских фигур».

6. «Эфод, или послание к Эратосфену о механических теоремах».

7. Две книги «О плавающих телах».

8. «Измерение круга».

9. «Псаммит».

10. «Задача о быках».

Две книги «О равновесии плоских фигур» имеют своей целью определить центр тяжести параболического сегмента; таким образом, они написаны после «Квадратуры параболы».

Во вступлении к «Эфоду» Архимед писал о найденных им теоремах. Эти теоремы оказались отличными от найденных ранее: действительно в прежних теоремах коноидальные и сфероидальные тела, а также их сегменты сравнивались по величине с конусами и цилиндрами, и ни одно из этих тел не оказалось равным телесной фигуре, ограниченной плоскостями; из рассматриваемых же тел, ограниченных двумя плоскостями и цилиндрическими поверхностями, каждое оказывается равным одной из телесных фигур, ограниченных плоскостями.

Таким образом, «Эфод» написан после «Коноидов и сфероидов».

Вторая книга «О плавающих телах» рассматривает положение равновесия сегмента параболоида, для чего необходимо знать положение центра тяжести соответствующего объема. Так как это положение определено в «Эфоде», то книги о плавании написаны после «Эфода».

Таким образом, порядок этих сочинений можно считать установленным — все они написаны после «Квадратуры параболы».

Оставшиеся три произведения относятся к вычислительной ма-

тематике. Из них особенно интересна книга «Об измерении круга», написанная, как писал сам Архимед, ранее «Псаммита».

В первых четырех указанных сочинениях (в посланиях к Досифею) Архимед занимается определением поверхностей и объемов различных фигур и тел. Его решение состоит из двух стадий: в первой он решает задачу сначала механическим способом, разбивая исследуемую фигуру на весьма малые части, очень похожие на «неделимые» Демокрита; получив таким образом решение задачи, он доказывает его строго геометрически, пользуясь методом исчерпания Евдокса, строя последовательные совокупности прямолинейных фигур или пластинок так, чтобы они «исчерпали» всю площадь или объем измеряемой фигуры. В «Квадратуре параболы» он делает это, беря метод исчерпания в его первоначальной форме. Рассмотрим этот метод.

Пусть  $AOB$  (рис. 3) представляет сегмент параболы, площадь которого нужно определить; пусть  $OC$  ось параболы, которую принимаем за ось  $x$ , тогда соотношение между абсциссами  $x$  и ординатами  $y$  параболы будет иметь вид:

$$y^2 = 2px. \quad (1)$$

Архимед пользуется свойством параболы, что все ее диаметры параллельны. Он вписывает в параболу треугольник

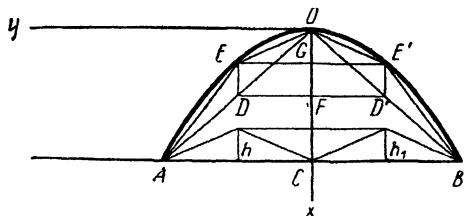


Рис. 3

$AOB$ , вершина которого совпадает с вершиной параболы; площадь этого треугольника примем за единицу. Так как ось  $Ox$  — ось параболы, то  $C$  — середина прямой  $AB$ ,  $OC$  — диаметр сегмента  $AOB$ .

После выделения треугольника  $AOB$  получим еще два сегмента параболы. Разделим хорды  $OA$  и  $OB$  пополам в точках  $D$  и  $D'$  и проведем отрезки  $DE$  и  $D'E'$ . Соединив прямыми точки  $E$  и  $E'$  соответственно с  $A$ ,  $O$  и  $B$ , получим еще два треугольника  $AEO$  и  $BE'O$ . Проведем прямые  $DD'$  и  $EE'$ ; полученная фигура будет, очевидно, параллелограммом.

Далее

$$EG = DF = AC/2.$$

Но  $EG$  представляет ординату, соответствующую абсциссе  $OG$ , а  $AC$  — ординату для абсциссы  $OC$ . Так как  $AC = 2EG$ , то по уравнению (1) параболы

$$OC = 2^3 OG,$$

или

$$OG = GF = ED = OC/4.$$

Переместим треугольники  $AEO$  и  $BE'O$  параллельно оси  $Ox$  так, чтобы они стали основаниями на прямой  $AB$ . Так как высоты  $ED$

и  $E'D'$  равны  $\frac{1}{4}OC$ , то нетрудно видеть, что сумма площадей этих треугольников в передвинутом положении равна четверти  $AOB$ , или, поскольку площадь  $AOB$  принята за единицу,  $\frac{1}{4}$ .

Сумма площадей полученных трех треугольников равна:

$$1 + 1/4.$$

Если рассмотреть еще четыре сегмента на хордах  $AE$ ,  $EO$ ,  $OE'$  и  $E'B$  и вписать в них треугольники, то аналогичное рассуждение покажет, что сумма площадей четырех этих треугольников равна  $\frac{1}{4}$  суммы треугольников  $AEO$  и  $OE'B$ ; добавив эти треугольники, получим сумму

$$1 + 1/4 + (1/4)^2.$$

Продолжая рассуждать таким же образом, получим, что площадь рассматриваемого сегмента равна сумме геометрической прогрессии:

$$1 + (1/4) + (1/4)^2 + (1/4)^3 + \dots = 4/3;$$

$$S = 4/3 \text{ } AOB = 4/3 \cdot 1/2 \text{ } ABOC = 2/3 \text{ } ABOC.$$

Таким образом, если на основании  $AB$  сегмента и его оси  $OC$  построить прямоугольник (параллелограмм), то площадь параболического сегмента будет равна  $\frac{2}{3}$  площади этого параллелограмма.

В книгах «О шаре и цилиндре» наблюдается следующая эволюция метода исчерпания. Определяемая величина заключается между двумя суммами, из которых одна больше, а другая меньше определяемой величины, причем отношение этих сумм может быть сделано сколь угодно близким к единице.

Тот же метод использован в книгах «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах», но только теперь определяющее условие заключается в том, что разность этих сумм может быть сделана сколь угодно близкой к нулю.

Так как в книге «Об измерении круга» употребляется третья форма метода исчерпания, то имеются все основания полагать, что эта книга была написана не ранее сочинений «О спиралях» и «О коноидах и сфероидах». Кроме того, интересна близость тем книги «О спиралях» и «Измерения круга»: и та и другая касаются определения длины окружности, но только в первой книге длина окружности получается при помощи построения, а во второй — при помощи вычисления.

Таким образом, самым ранним из сохранившихся полностью сочинений Архимеда является «Квадратура параболы», написанная им в возрасте 45 лет. Чем же занимался Архимед ранее? В рассказе Полибия об осаде Сиракуз говорится, что первая Пуническая война не разрешила вопроса о форме отношений между Римом и Карфагеном. Карфагеняне не могли примириться с потерей Сицилии, а немного позже и Сардинии с Корсикой, захваченных Римом.

В 218 г. до н. э. началась вторая Пуническая война походом Ганнибала из Испании через Альпы на Италию. Ряд блестящих побед Ганнибала, из которых наиболее важной была победа, одержанная при Каннах (216 г. до н. э.), поставил Рим в очень тяжелое положение, но все же римляне не сдавались. Ганнибалу пришлось искать союзников. На следующий год после победы при Каннах умер девяностолетний Гиерон, сохранивший верность Риму, но после его смерти в Сиракузах одержала верх антиримская партия и Сиракузы примкнули к восстанию греческих колоний в Сицилии. Против Сиракуз отправили войско под командой Аппия Клавдия и флот под командованием Марка Марцелла. Римляне хотели взять Сиракузы первым же приступом, надеясь при многочисленности рабочих рук покончить с приготовлениями в течение пяти дней. Но при этом они не приняли в расчет искусства Архимеда, не догадались, что иногда дарование одного человека способно сделать больше, чем огромное множество рук. Архимед заготовил внутри города, а равно и против нападающих с моря, такие средства обороны, что защитникам не было необходимости утруждать себя непредусмотренными работами на случай неожиданных способов нападения; у них заранее готово было все к отражению врага в любом случае.

Дальше Полибий рассказывает о нападении римского флота с моря. Архимед соорудил машины, приспособив их к метанию снарядов на любое расстояние. Так, если неприятель подплывал издали, то Архимед поражал его из дальнобойных камнеметальниц тяжелыми снарядами или стрелами и повергал его в трудное положение. Когда же снаряды начинали летать поверх неприятеля, то Архимед применял меньшие машины, каждый раз сообразуясь с расстоянием, и наводил на римлян такой ужас, что они никак не решались идти на приступ или приблизиться к городу на судах. Наконец, Марк (Марцелл), раздосадованный неудачами, вынужден был сделать попытку тайком ночью подойти к городу на кораблях. Когда римляне подошли к берегу на расстояние выстрела, Архимед употребил другое средство, направленное против воинов, сражавшихся с судов, а именно: он велел сделать в стене приблизительно на высоте человеческого роста множество отверстий, с наружной стороны имевших в ширину пальца четыре; у отверстий изнутри стены поставил стрелков, через отверстия обстреливал корабельных воинов и тем отнимал у них всякую возможность сделать что-нибудь. Таким образом, далеко или близко находился неприятель, Архимед не только разрушал все его планы, но и производил в его рядах большие опустошения.

В настоящее время то, что сделал Архимед, называется пристрелкой по квадратам: вся местность, окружающая крепость, делится на квадраты и для каждого квадрата определяется возвышение (угол с горизонтом дула) для орудия, из которого должен производиться выстрел. Разница заключается лишь в том, что во времена Архимеда вместо изменения возвышения надо было пользоваться изменением калибра орудия. Во всяком случае, когда неприятель показывался в каком-либо квадрате, пускались в ход ору-

для калибра, соответствующего этому квадрату. Такого рода пристрелка предполагает долгую предварительную работу по определению расстояний для различных квадратов и по подбору наилучшего калибра орудий.

Когда корабль приближался к городской стене, то, кроме действия метательных орудий, с машины спускалась прикрепленная к цепи железная лапа; управляющий жерлом машины захватывал в каком-либо месте этой лапой нос корабля и потом опускал вниз находящийся внутри города конец машины. Когда нос судна был таким образом поднят и судно поставлено отвесно на корму, то плечо рычага закреплялось неподвижно, а лапа вместе с цепью отделялась от машины освобождающим приспособлением. Вследствие этого некоторые суда ложились на бок, другие совсем опрокидывались, большинство же от падения в море носом со значительной высоты погружались и наполнялись водой, внося большой беспорядок и ужас среди экипажа. Изобретательность Архимеда приводила Марка в отчаяние; с прискорбием он видел, что осажденные глумятся над его усилиями и причиняют ему большие потери.

Римляне сильно страдали от камнеметальниц и катапульт, из которых их обстреливали; сиракузяне имели в запасе множество превосходных и метких метательных орудий, на которые царь Гиерон дал средства, а Архимед изобрел и мастерски построил машины.

Расчет машин, поднимающих корабли, немыслим без учета потери веса корабля, погруженного в море; это можно сопоставить с открытием закона Архимеда.

Рассмотрим теперь подробно две книги Архимеда «О равновесии плоских фигур» (или о центре тяжести плоских фигур). Считают, что первая книга этого произведения посвящена теории рычага; некоторые авторы полагают даже, что эта книга, взятая в отдельности, является первым произведением Архимеда, а вторая книга, содержащая определение центра тяжести параболического сегмента, представляет самостоятельное произведение.

Однако в первой книге определяются только центры тяжести тех плоских фигур (параллелограмм, треугольник), которые нужны для доказательства теорем второй книги. Кроме того, многие положения во второй книге являются обобщением, сделанным на основании мыслей, изложенных в первой книге (первое предложение второй книги является обобщением пятого и шестого предложений первой книги). Первую книгу нельзя считать первым сочинением на рассматриваемую тему, так как в ней не дано самого главного — определения центра тяжести. Это было сделано в произведении, предшествовавшем созданию «Квадратуры параболы», в котором имеются ссылки на это произведение. Орывки из него сохранились в «Механике» Герона Александрийского и «Математической библиотеке» Паппа. Наиболее важным из этих отрывков является сформулированное Архимедом определение понятия о центре тяжести: центром тяжести тела называется расположенная внутри него точка, обладающая тем свойством, что если за нее мысленно подвесить

тяжелое тело, то оно остается в покое и сохраняет первоначальное положение.

Законы равновесия выводятся Архимедом из следующих допущений, помещенных в начале первой книги «О равновесии».

1. Равные тяжести на равных длинах уравниваются, на неравных же длинах не уравниваются, но перевешивают тяжести на большей длине\*.

2. Если при равновесии тяжестей на каких-либо длинах к одной из тяжестей что-либо прибавить, то они не будут уравниваться, но перевесит та тяжесть, к которой прибавлено.

3. Если от одной из тяжестей отнять что-либо, то они не будут уравниваться, но перевесит та тяжесть, от которой не было отнято.

4. При совмещении друг с другом равных и подобных плоских фигур совмещаются друг с другом и их центры тяжести.

5. У неравных, но подобных фигур центры тяжести располагаются подобно.

6. Если величины уравниваются на каких-либо длинах, то на тех же длинах уравниваются и величины, равные им.

7. Во всякой фигуре, периметр которой везде выпукл в одну и ту же сторону, центр тяжести находится внутри фигуры.

Приведем доказательство Архимеда в той форме, которую придал ему Галилей.

Пусть в точке  $O$  подвешено за середину коромысло  $MN$ , имеющее длину  $2(a+b)$  (рис. 4). К этому коромыслу при помощи бес-

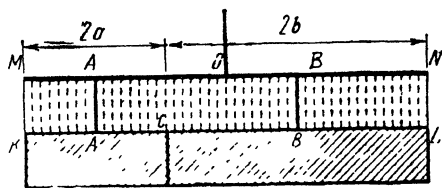


Рис. 4

конечного множества вертикальных веревочек прикреплена однородная балка  $KL$  такой же длины  $2(a+b)$ . Вся система будет, очевидно, в равновесии, которое не нарушится, если разрежем балку по линии  $CC$  на два отрезка:  $KC$  — длины  $2a$  и  $CL$  — длины  $2b$ . После этого обрежем все веревки, кроме двух:  $AA$  и  $BB$ , находя-

щихся в серединах отрезков  $KC$  и  $CL$ , отчего равновесие тоже не нарушится. Таким образом, величина  $KC = 2a$  на плече  $AO = b$  будет уравнивать величину  $CL$  на плече  $OB = a$ . Иными словами, при равновесии грузы, приложенные в  $A$  и  $B$ , будут обратно пропорциональны соответствующим плечам.

Равновесие не нарушится, если обе отрезанные части повернем вокруг осей  $AA$  и  $BB$  на любые углы; именно это и предполагает

\* Перевод сделан в современных терминах. Нужно, однако, отметить, что у Архимеда вместо «тяжесть» стоит μέγεθος — величина, а вместо «уравниваются» — ἰσορροπούνται — имеют равные доли — моменты.

допущение 6, равносильное такой формулировке. Действие груза, приложенного в данной точке, определяется только его величиной, т. е. совершенно не зависит от формы или ориентации этого груза.

Возможность поворачивания обеих осей балки вокруг осей  $AA$  и  $BB$  имеет место лишь при требуемом Махом законе пропорциональности моментов длине плеча в первой степени и исключает другие законы, например квадратичную зависимость; поэтому доказательство Архимеда является вполне строгим.

Закон равновесия рычага используется Архимедом в качестве основы метода геометрического интегрирования, изложенного им в «Эфоде», как средство для исследования и предварительного решения задач. Покажем его на простом примере, а именно на рассмотренной выше квадратуре параболического сегмента, но только сделаем упрощение: будем находить не площадь сегмента, равную двум третям параллелограмма, а площадь, которая остается у параллелограмма, если вырезать из него этот сегмент. Тогда задачу можно сформулировать в таком виде: найти площадь, заключенную между осью абсцисс, дугой параболы, заданной уравнением  $y = ax^2$ , и ординатой, соответствующей абсциссе  $OA = l$  (рис. 5).

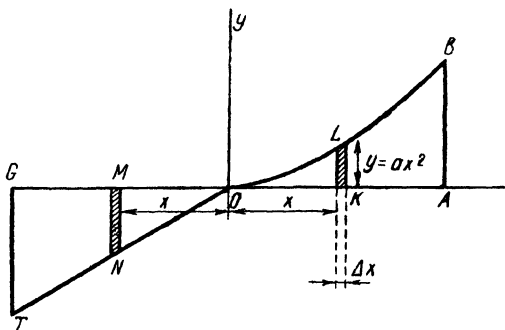


Рис. 5

Возьмем равноплечий рычаг  $AOG$  длиной  $2l$  с точкой опоры  $O$ ; на одном из его плеч расположим площадь  $OAB$  и разобьем ее на ряд весьма тонких полосок шириной  $\Delta x$ . Пусть  $KL$  — одна из этих полосок, соответствующая абсциссе  $OK = x$ ; тогда ордината  $KL = y$  выразится  $ax^2$  и вся площадь полоски

$$\Delta S = ax^2 \Delta x.$$

Сдвинем ее на конец рычага  $A$ ; момент этой полоски относительно точки  $O$  равен

$$l \Delta S = lax^2 \Delta x.$$

Попробуем уравновесить этот момент, подвесив с левой стороны рычага на том же расстоянии  $x$  полоску  $MN$  такой же ширины  $\Delta x$ . Длина соответствующей ординаты  $MN$  определится сравне-

нием моментов обеих полосок относительно  $O$ :

$$xMN\Delta x = l\alpha x^2\Delta x,$$

откуда  $MN = \alpha l x$ .

Поступая так с каждой полоской, на левом плече рычага получим ряд полосок, непрерывно распределенных по длине  $GO$ . Так как ординаты этих полосок пропорциональны расстояниям  $x$ , то концы их расположатся по прямой линии  $ONT$ ; величина крайней ординаты  $GT = \alpha l^2$ .

Площадь  $S = OAB$ , сосредоточенная на конце  $A$ , уравновешена прикрепленным к стороне  $OG$  треугольником  $OGT$ . Площадь этого треугольника равна

$$\frac{1}{2} \alpha l^3 l,$$

а расстояние его центра тяжести от вершины  $O$ :

$$\frac{2}{3} OG = \frac{2}{3} l.$$

Сравнивая момент этого треугольника относительно  $O$  с моментом относительно той же точки, сосредоточенной в точке  $A$  искомой площади  $S$ , получим

$$\frac{2}{3} l \frac{1}{2} \alpha l^3 l = Sl,$$

откуда

$$S = \frac{1}{3} \alpha l^3,$$

или

$$S = \frac{1}{3} l \alpha l^2 = \frac{1}{3} OA \cdot AB,$$

что совпадает с найденным выше результатом.

Успех вывода получается в результате понижения степени рассматриваемой кривой — определение величины площади, ограниченной двумя прямоугольными отрезками и кривой второй степени, сводится к определению центра тяжести площади, ограниченной кривой первой степени, т. е. прямой. Этот метод приложим, очевидно, к кривым, уравнение которых имеет вид  $y = \alpha x^n$ .

Кроме перечисленных произведений, дошедших до нас полностью, сохранились отрывки более ранних произведений Архимеда, имеющиеся в «Механике» Герона и в 8-й книге «Библиотеки» Паппа.

У Герона есть отрывок из сочинения Архимеда «Книга опор», где не замечается никаких следов понятия о центре тяжести. Он пишет: если балка оперта по концам, то на каждую опору падает половина веса; если имеется еще третья опора между концами, то на нее падают по половине веса балки в обоих соседних пролетах; таким образом, средняя опора несет половину веса всей балки независимо от того, в каком месте она помещена.

Из книги Архимеда, название которой установить трудно (то ли это «О рычагах», то ли «О равновесии» или «Механика»), имеются большие отрывки: один в «Механике» Герона (книга I, стр. 24), а другой в «Математической библиотеке» Паппа (книга VIII, стр. 5—8). Эти отрывки показывают, как доказывались существование и единственность центра тяжести твердого тела произвольной формы.

Архимед рассматривает вертикальную плоскость  $ABCD$ , ограниченную сверху горизонтальной прямой  $AB$ . Если на эту прямую положить тяжелое тело, то оно может оказаться в таком положении, что будет оставаться в покое, не вращаясь и не падая вниз. Если теперь мы мысленно продолжим плоскость  $ABCD$ , то она расщепит лежащее тело на две части, обладающие одинаковыми моментами и взаимно уравновешивающиеся. Если затем переставить груз так, чтобы он касался прямой  $AB$  другой своей частью, то можно дать ему такое положение, что он, будучи опущен, останется в покое и не упадет. Если снова вообразить плоскость  $ABCD$  продолженной, то она тоже разделит груз на две взаимно уравновешивающиеся части и пересечется первой плоскостью, делившей тот же груз на две взаимно уравновешивающиеся части; если бы эти плоскости не пересекались, то те же самые части были бы и уравновешивающимися, и неуравновешивающимися, что нелепо.

Вообразим прямую  $AB$ , перпендикулярную к горизонтальной плоскости; положим груз на точку  $A$  так, чтобы он, пользуясь прямой  $AB$  как подставкой, оставался в покое. Если продолжить прямую  $AB$ , то некоторая ее часть будет находиться внутри рассматриваемого тела. Снова наложим его на эту прямую другой частью так, чтобы оно опять стало неподвижным; тогда продолженная прямая  $AB$  пересечется первоначально заключавшимся внутри тела отрезком.

Действительно, если бы она не пересеклась, то оказалось бы возможным, что некоторые плоскости, проведенные через каждую из этих прямых, не пересекаются друг с другом внутри тела, причем каждая из них разделяет груз на части, которые одновременно являются и уравновешивающимися, и неуравновешивающимися, что бессмысленно; следовательно, упомянутые прямые пересекутся внутри тела.

Если в других положениях помещать груз на точку  $A$  так, чтобы он оставался в покое, то снова продолженная прямая  $AB$  обязательно пересечется заключающимися внутри тела отрезками первоначальных прямых. Из этого ясно, что такие воображаемые прямые пересекают друг друга в одной и той же точке; эта точка и называется *центром тяжести*.

Как следствие отсюда получается, что закрепленное в этой точке тело остается в равновесии в любом положении.

Вышеописанная методика применяется и в приведенных Героном («Механика», книга II, стр. 35—36) правилах нахождения центра тяжести различных плоских фигур. Для этого определяем центр тяжести треугольника, равномерного по толщине и однород-

ного по весу. Пусть дан треугольник  $ABC$  (рис. 6). Разделим линию  $BC$  пополам в точке  $D$  и соединим  $A$  и  $D$ . Если опереть треугольник на линию  $AD$ , он не будет иметь момента ни в ту, ни в другую сторону, так как треугольники  $ABD$  и  $ADC$  равны. Точно так же если разделить линию  $AC$  в точке  $E$  и соединить точки  $B$  и  $E$ , то, если опереть треугольник на линию  $BE$ , он также не наклонится ни в ту, ни в другую сторону. Так как треугольник, будучи оперт на каждую из линий  $AD$  и  $BE$ , находится в равновесии своих частей и не наклоняется ни в ту, ни в другую сторону, то общая точка  $F$ , в которой эти две линии пересекаются, является центром тяжести.

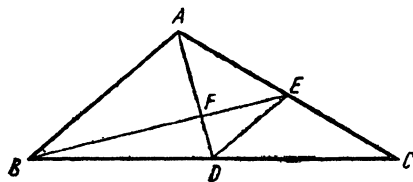


Рис. 6

Так как треугольники  $ABD$  и  $ADC$  равны, это заставило некоторых исследователей думать, что Архимед или кто-либо из его предшественников считал, что центр тяжести плоской фигуры будет точка, в которой пересекаются прямые, делящие площадь фигуры на две равные части. Невозмож-

ность такого предположения сразу же устанавливается, если прочесть, как определяется центр тяжести четырехугольника.

Пусть дан четырехугольник  $ABCD$  (рис. 7). Соединим точки  $B$  и  $D$  и разделим  $BD$  пополам в точке  $E$ ; соединим также  $A$  и  $E$ ,  $E$  и  $C$  и разделим линии  $AE$  и  $EC$  в точках  $F$  и  $H$  таким образом, чтобы  $AE$  была равна удвоенной величине  $FE$ , а  $CH$  — удвоенной  $HE$ . Тогда центр тяжести треугольника  $ABD$  — точка  $F$ , а центр тяжести треугольника  $BDC$  — точка  $H$ .

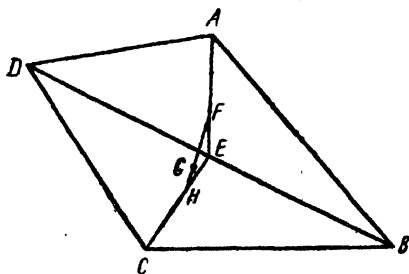


Рис. 7

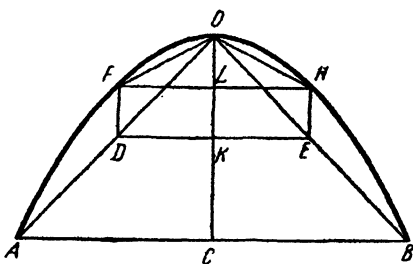


Рис. 8

Получим то же самое, если представлять треугольник  $ABD$  сосредоточенным в точке  $F$ , а треугольник  $BDC$  — в точке  $H$ . Тогда линия  $FH$  становится коромыслом, на концах которого находятся эти величины. Поэтому если разделить линию  $FH$  в точке  $G$  таким образом, чтобы  $GH$  относилось к  $FG$  как вес  $F$ , т. е. вес треугольника  $ABD$  к весу  $H$  — к весу треугольника  $BDC$ , то точка  $G$ , в ко-

торой оба веса уравниваются, является центром тяжести этого четырехугольника.

Момент веса  $F$  равняется сумме моментов весов всех частей треугольника  $ABD$ , иными словами, в распоряжении Архимеда был весь материал современной теории параллельных сил. Поэтому при передаче результатов, полученных Архимедом, можно пользоваться современным изложением при обязательном условии сохранения его чертежа.

Покажем, как Архимед определял центр тяжести сегмента параболы (предложение VIII второй книги «О равновесии плоских фигур»).

Пусть дан параболический сегмент  $AOB$  с вершиной  $O$  (рис. 8). Проведем диаметр  $OC$  и впишем в параболу треугольник  $AOB$ . Выше показано, что площадь сегмента параболы равна  $\frac{4}{3}$  треугольника  $AOB$ . Предположим, что эта площадь равна трем, тогда площадь остающихся сегментов параболы  $AOF$  и  $BOH$  будет равна единице. Разделим хорды  $OA$  и  $OB$  пополам; проведем диаметры  $FD$  и  $HE$ , а также прямые  $DE$  и  $FH$ . Здесь

$$DK = FL = 1/2 AC, \text{ а } OL = LK = 1/4 OC.$$

Пусть  $OC = h$ ; центр тяжести параболического сегмента лежит на  $OC$ , а сегментов  $AFO$  и  $BOH$  — соответственно на диаметрах  $FD$  и  $EH$ .

Предположим, что расстояние от центра сегмента  $AOB$  до основания  $AB$  равняется  $kh$ , где  $k$  — неопределенный коэффициент; равным образом расстояния от прямой  $DE$  центров тяжести сегментов  $AOF$  и  $BOH$  равны:  $kFD = k \frac{h}{4}$ . Далее высота центра тяжести треугольника  $AOB$  над основанием  $AB$  равна  $\frac{1}{3} h$ , а расстояние  $CK = h/2$ . Получим теперь, что момент площади сегмента  $AOB$  относительно  $AB$  равен сумме моментов площадей треугольника  $AOB$  и обоих сегментов  $AFO$  и  $BOH$ . В таком случае

$$4kh = 3 \frac{h}{3} + 1 \left( \frac{h}{2} + k \frac{h}{4} \right).$$

Сокращая это выражение на  $h$ , после очевидных упрощений получаем

$$\left( 4 - \frac{1}{4} \right) k = 1 + \frac{1}{2},$$

откуда

$$k = \frac{3/2}{15/4} = \frac{2}{5}.$$

Таким образом, центр тяжести параболического сегмента находится на диаметре на расстоянии  $\frac{2}{5}$  его длины от основания.

Второй работой Архимеда, имеющей определенное отношение к механике, является книга «О спиралях». В самом ее начале интересна терминология, показывающая развитие понятия о скорости. Как существительное «скорость» во времена Архимеда еще не употреб-

лялось: было прилагательное, которое употреблялось как «более или менее скорый» и «равноскорый»; так назывались движения, при которых в одно и то же время проходились одинаковые пути, независимо от того, как эти движения происходили. Для обозначения равномерности движения Архимед употреблял выражение «равно-скоро само с собой», т. е. равноскорыми должны быть движения во всех промежутках времени, на которые можно подразделить все движение.

Основная тема этого произведения заключается в задаче: построить прямую, длина которой равнялась бы длине окружности. Для решения Архимед пользуется кинематическим методом; он строит кривую, так называемую архимедову спираль, радиус-вектор которой изменяется пропорционально полярному углу (рис. 9).

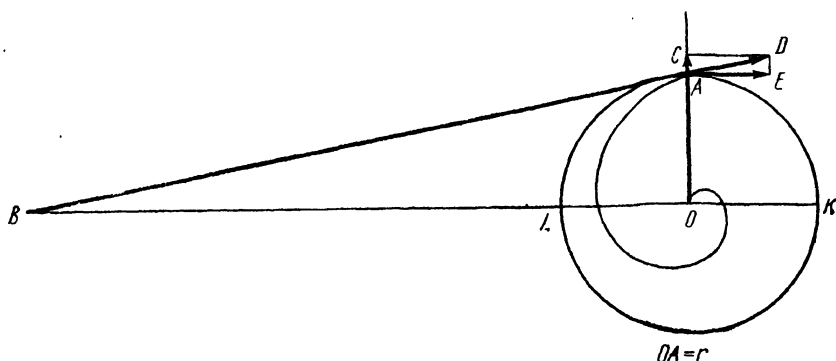


Рис. 9

Пусть точка  $O$  представляет полюс спирали, радиус-вектор которой за время первого оборота сделался равным  $r = OA$ , а прямая  $AD$  является касательной к спирали в точке  $A$ . Спираль образуется в результате сложения двух движений: равномерного — прямолинейного по прямой  $OAC$  и равномерного — кругового. Если бы точка, описывающая прямую, остановилась, придя в точку  $A$ , то в переносном вращении она описала бы изображенную на чертеже окружность  $AKL$  с радиусом  $r$ .

Пусть  $AC$  и  $AE$  представляют весьма малые перемещения точки, описывающей спираль, в обоих составляющих движениях — по радиусу и перпендикулярно к нему по окружности. При сложении этих движений описывающая спираль точка из положения  $A$  перейдет в точку  $D$  и прямая  $AD$  будет касательной к спирали. Перпендикулярно к радиусу  $OA$  проведем прямую  $OB$  и продолжим касательную  $AD$  до пересечения ее этой прямой в точке  $B$ . В начале первого оборота прямая занимала положение  $OAC$ ; от  $OA$  отсчитывались углы поворота вращающейся прямой.

По истечении времени первого оборота прямая придет в первоначальное положение, угол поворота станет равным  $360^\circ$  и точка  $A$

вращающейся прямой опишет окружность радиусом  $r$ . Таким образом, путь, пройденный точкой  $A$  в относительном движении по радиусу за время первого оборота, равен  $OA$ , а в переносном движении по окружности — ее длине. Но эти пути относятся как скорости, или как перемещения за один и тот же промежуток времени, т. е. как  $AC$  и  $AE$ . Из подобия треугольников  $AED$  и  $BOA$  получаем:

$$AE : ED = BO : OA.$$

Иными словами, если  $OA$  — путь, пройденный точкой в прямолинейном относительном движении, то  $BO$  — путь, пройденный за то же время точкой  $A$  в переносном движении, т. е. длина окружности  $AKLA$ .

Треугольник  $AED$ , по существу, представляет дифференциальный треугольник Барроу — Ньютона, и не исключена возможность, что понятие об этом треугольнике появилось у Исаака Барроу в результате чтения сочинений Архимеда, которые с переделанными доказательствами были им изданы в 1675 г. Во всяком случае изучение сочинений Архимеда математиками XVII в. было необходимой подготовительной работой к появлению классического анализа бесконечно малых.

Последним произведением Архимеда является его сочинение «О плавающих телах». В первой книге он устанавливает основные законы равновесия тел в жидкости и рассматривает условия равновесия сферического сегмента, погруженного в воду, поверхность которой он считает тоже сферической, как поверхность реальных земных морей. Во второй книге он формулирует носящий его имя закон и затем рассматривает условия равновесия плавающего в жидкости сегмента параболоида вращения, причем поверхность жидкости теперь уже считается плоской.

В основе его рассуждений лежат теоремы, определяющие величину объема и положение центра тяжести сегмента параболоида вращения.

При погружении тяжелого твердого тела в жидкость, плотность которой больше плотности тела, оно опускается в жидкость так, чтобы поверхность жидкости (так называемая плоскость плавания) отсекала от тела объем, вес жидкости в котором равнялся весу тела.

Если построить все плоскости плавания для различных положений плавающего тела, то огибающая всех таких плоскостей будет некоторой поверхностью, которая называется *поверхностью сечений*.

Центры тяжести объемов, отсекаемых плоскостями плавания, образуют поверхность, называемую *поверхностью центров*.

Для этих поверхностей имеются такие теоремы.

1. *Плоскость плавания касается поверхности сечений в центре тяжести фигуры, отсекаемой поверхностью тела на плоскости плавания.*

2. *Касательная плоскость к поверхности центров параллельна соответствующей плоскости плавания.*

Для нахождения всех плоскостей плавания в положениях равновесия плавающего тела нужно из центра его тяжести опустить нормали к поверхности центров и провести соответствующие этим нормальям плоскости сечения. Эти плоскости и будут искомыми плоскостями плавания.

Архимед рассматривал только те положения равновесия, когда основание сегмента находится или полностью вне поверхности жидкости (вершина сегмента обращена вниз), или полностью внутри жидкости (сегмент плавает с вершиной над поверхностью жидкости).

Так как сегмент принадлежит параболоиду вращения, то эту задачу можно свести к плоской, заменив все поверхности линиями, представляющими их сечения плоскостью, проведенной через ось параболоида. Обозначим сечение данного сегмента  $ABA$ , его ось  $OB$ , основание  $AOA$  и центр тяжести  $C_0$  ( $OC_0 = \frac{1}{3} OB$ ) (рис. 10). Пусть  $NN$  — сечение сегмента поверхностью жидкости,  $DB$  — ось погруженной части, а  $E$  ( $DE = \frac{1}{3} DB$ ) — центр тяжести объема погруженной части.

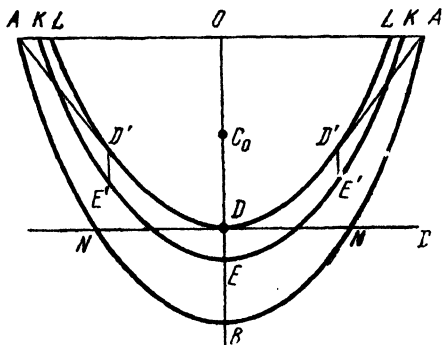


Рис. 10

Поверхность сечений изобразится параболой  $LDL$ , вершина которой  $D$  находится на поверхности жидкости; эта парабола представляет параболу  $ABA$ , сдвинутую вверх на расстояние  $BD$ . Чтобы получить поверхность центров, нужно через точку  $E$  провести такую же параболу  $KEK$ . Если Архимед рассматривает случай, когда основание  $AOA$  находится над поверхностью жидкости, то ему нужны часть  $D'DD'$  параболы сечений, ограниченная точками  $D', D'$ ,

касательные в которых проходят через конец  $A$  основания, а также соответствующая часть  $E'EE'$  параболы центров ( $D'E'$  параллельна  $OB$ ). Продолжить далее эти поверхности для него нельзя, так как для этого пришлось бы определить объем сегмента, отсеченный плоскостью, которая пересекает как боковую поверхность сегмента, так и плоскость основания, а эта задача им не решалась.

Если требуется определить положение равновесия сегмента, плавающего вершиной вверх, то надо определять объем и центр тяжести погруженной части сегмента, которая будет иметь вид  $ANNA$ , иными словами, представит разность двух параболических сегментов  $BNN$  и  $BAA$ . Основываясь на этом, можно построить новые кривые сечений и центров, которые тоже будут некоторыми парабололами.

Далее следует рассматривать моменты пары, образован-

ной весом сегмента и силой давления вытесненной воды, приложенной в центре тяжести погруженной части; равновесие имеет место, когда при отклонении от положения равновесия этот момент оказывается восстанавливающим. Таким образом, Архимед получает только положения устойчивого равновесия.

Разница между методом Архимеда и современным методом заключается в том, что сейчас плотность жидкости принимают постоянной и изменяют размеры рассматриваемого сегмента, а Архимед сохраняет постоянным положение тела, но изменяет плотность жидкости. Его методика, по существу, мало отличается от методики, выработанной в XIX в. при помощи теорем Дюпена.

Из этого не следует делать вывода о тождественности этих методов, как это делают некоторые исследователи, находящие у Архимеда даже понятие о метацентре, установленное лишь в XVIII в.

Основное различие заключается в том, что Архимед не мог построить поверхности сечений для всех положений тела относительно поверхности жидкости, а следовательно, и не знал ее, так как у греков построимость была критерием существования того или другого геометрического образа или операции. Силой своего гения Архимед смог подняться до высот, достигнутых наукой в XIX в.

Для полной характеристики Архимеда следует отметить, что Архимед нашел значение  $\pi = 22/7$ . Что же заставило его найти числовое выражение отношения окружности к диаметру, тем более что он уже имел построение, позволяющее найти прямую, равную длине заданной окружности?

В истории европейской науки около 1600 г. математики тоже стремились найти более точное значение числа  $\pi$ . Это было время, когда Адриан Меций нашел значение  $\pi = 355/113$ , а Лудольф из Кельна вычислил число  $\pi$  с точностью до 36-го десятичного знака. Виллиброд Снеллий открыл метод триангуляции и применил его к определению размеров Земли.

Не было ли чего-нибудь подобного и во времена Архимеда? Тит Ливий, описывая осаду Сиракуз в 24-й книге своей истории Рима, называет Архимеда «единственным в своем роде созерцателем неба и светил». О найденной числовой величине  $\pi$  Архимед вспоминает в «Псаммите», где идет речь об определении размеров мира и вычислении количества песчинок, которые могли бы заполнить объем мира. Он проводит также наблюдения, чтобы вычислить величину Солнца и расстояние от него до Земли. Свои наблюдения он применяет к центру Земли; между прочим это первое появление в истории астрономии понятия о так называемом параллаксе; ближайший предшественник Архимеда Аристарх Самосский, проводя эти же наблюдения на поверхности Земли, считал, что они дают такие же результаты, как если бы наблюдения производились из центра Земли.

Для определения потребного количества песка Архимед создал систему счисления, при помощи которой можно было изображать очень большие числа. Этим занимался не один он: систему счисления больших чисел создавал его младший современник Аполлоний Пергский. Правда, инженерный ум Архимеда не ограничился про-

стым вычислением; он, не придававший большого значения построенным им машинам, описал только одну из них — построенную им «астрономическую сферу». Эта сфера после взятия Сиракуз римлянами досталась в качестве добычи Марку Марцеллу, поместившему ее в Храме Доблести и сохранившему для себя лишь второй, меньший экземпляр.

В диалоге Цицерона «О государстве» одно из действующих лиц Сульпиций Галл (тоже занимавшийся астрономией и предсказавший даже лунное затмение) показывает эту сферу. Слушавший его рассказчик говорил об Архимеде, что в этом сицилийце был гений, равняться с которым человеческая природа не казалась способной. Для возможности представлений движений Солнца, Луны и пяти звезд ему пришлось отказаться от употребления сплошной сферы, на которой было бы невозможно их воспроизвести, и придумать другую совершенно отличного вида.

В изобретении Архимеда чудесным было искусство, в котором он мог объединить в одной системе и воспроизвести при помощи одного вращения все очень отличающиеся друг от друга движения и различные периоды обращения различных светил. Когда Галл приводил сферу в движение, то при каждом обороте можно было видеть, как Луна появлялась вслед за Солнцем на земном горизонте, как она появляется каждый день на небе; далее можно было видеть, как Солнце исчезало на небе и затем понемногу Луна погружалась в земную тень в тот самый момент, когда Солнце находилось с противоположной стороны.

С большими числами связано еще одно сочинение Архимеда, найденное в XVIII в. и опубликованное в 1773 г. известным немецким писателем Лессингом. Это так называемая «Задача о быках», посланная Архимедом на разрешение александрийским ученым, занимающимся подобными вопросами:

Сколько у Солнца быков, найди для меня, чужестранец?

(Ты их, подумав, считай, мудрости если не чужд).

Как на полях Тринакрийской Сицилии острова тучных

Их в четырех стадах много когда-то паслось.

Цветом стада различались: блистало одно млечнобелым,

Темной морской волны стада другого был цвет.

Рыжим третье было, последнее пестрым. И в каждом

Стаде была самцов множества тяжкая мощь.

Если  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  и  $T$  обозначим числа белых, черных, рыжих и пестрых быков, то они должны удовлетворять следующим уравнениям:

$$X = (1/2 + 1/3) Y + Z; \quad Y = (1/4 + 1/5) T + Z;$$

$$T = (1/6 + 1/7) X + Z.$$

Если  $x$ ,  $y$ ,  $z$  и  $t$  обозначим числа коров тех же цветов, то получим еще четыре уравнения:

$$x = (1/3 + 1/4) (Y + y); \quad y = (1/4 + 1/5) (T + t);$$

$$t = (1/5 + 1/6) (Z + z); \quad z = (1/6 + 1/7) (X + x).$$

Сколько у Солнца быков, чужестранец, коль точно ты скажешь,  
 Нам раздельно назвав числа тучных быков,  
 Так же раздельно коров, сколько каждого цвета их было,  
 Не назовет хоть никто в числах невеждой тебя,  
 Все ж к мудрецам причислен не будешь.

Эти неопределенные уравнения решить можно; наименьшие значения неизвестных, удовлетворяющих их, выражаются семи- и восьмизначными числами. Этого Архимед не считает достаточным для того, чтобы заслужить название мудреца. Поэтому он добавляет еще два условия:

1. Сумма быков белого и черного цвета должна быть точным квадратом:

$$X + Y = n^2;$$

2. Сумма пестрых и рыжих быков должна быть равна некоторому треугольному числу:

$$Z + T = \frac{n'(n' + 1)}{2},$$

где  $n$  и  $n'$  — некоторые целые числа.

После этого Архимед продолжает:

Если ты это найдешь, чужестранец, умом пораскинув,  
 И сможешь точно назвать каждого стада число,  
 То уходи, возгордившись победой, и будет считаться,  
 Что в этой мудрости все ты до конца превзошел.

Решением этих задач занимались ряд математиков. В немецком переводе издания Архимеда Th. Neath указывается порядок общего числа быков:

$$7766 \cdot 10^{206541}.$$

Архимед поставил задачу, которая, как он знал, практически не может быть разрешена.

## КИНЕМАТИКА ПЛАНЕТНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Важнейшим достижением в истории науки было открытие О. Нейгебауэром вавилонской математики, а также вавилонской астрономии. Большой прогресс в математике древности был достигнут примерно в начале второго тысячелетия до н. э., когда в Двуречьи было образовано объединенное государство сумеров (так называемая третья династия Ура). В это время была изобретена шестидесятиричная позиционная система счисления, шестидесятиричные дроби, аналогичные нашим десятичным, а также решение квадратных уравнений.

Эти открытия шумерийцы сделали на закате своего исторического существования, так как большинство математических документов относится к последующему времени, когда столицей этого государства стал Вавилон и правила в нем семитическая династия. Политическое господство шумерийцев окончилось, а культурное оста-

лось: шестидесятиричные дроби применялись для астрономических вычислений в Западной Европе вплоть до времен Коперника (они даже так и назывались астрономическими); их следы и до сих пор существуют в наших минутах и секундах и делении окружности на 360 градусов.

Еще больший интерес представляет открытие вавилонской планетной астрономии. В начале XX в. было довольно распространено мнение (берлинская школа Винклера) о чрезвычайной древности вавилонской астрономии. Считалось, что в Древнем Вавилоне был известен зодиак и его деление на 12 частей — пять летних и семь зимних; отсюда выводилось мистическое значение числа 7 (семь дней недели, семь тонов гаммы). Большое значение придавалось прецессии — перемещению точки весеннего равноденствия с Востока на Запад противоположно видимому движению Солнца. В настоящее время эта точка находится в созвездии Рыб, в первом тысячелетии до н. э. она находилась в Овне, который и считался первым знаком зодиака, определявшим начало года.

Возникновение вавилонской науки и философии относилось к тому времени, когда точка весеннего равноденствия находилась в созвездии Тельца. Некоторые исследователи относили начала вавилонской культуры еще к более раннему времени — эпохе Ближнецов.

Конечно, в настоящее время вся эта теория представляет только психологический интерес. Значительно позже появляются так называемые *Omina* — приметы или предсказания. Списки этих *Omina* существовали с очень древних времен: они касались различных гаданий — по печени, по звездам и др. Наиболее интересные относятся к VIII—VII в. до н. э.: это донесения придворных магов и астрологов царям Асаргаддону и Ашурбанипалу. Эти донесения представляют большой исторический интерес, так как позволяют узнать обратную сторону событий ассирийской истории; если о победах ассирийских монархов известно из их торжественных надписей, то о поражениях и других неприятностях можно судить по тем вопросам, которые цари задавали своим магам. Часто они касались личных дел царя: спрашивалось, например, выздоровеет ли царь после болезни, как отнесутся боги к тому, если наследник престола будет назначен соправителем и т. д.; таким образом, астрологи получали возможность влиять не только на внешнюю, но и на внутреннюю политику.

Особенный интерес для астрономии представляют тексты, касающиеся затмений. Например, лунное затмение будет 14 адара. Когда 14 адара Луна затмится в первом часу ночи, будет принято решение. Это несчастье для стран Элама и Сирии, но счастье для царя. Или 15 числа месяца эзула Луна была видна одновременно с Солнцем; затмения не было. Царю написано: будет затмение. Оно действительно было. Это знамение мира для царя.

Очевидно, предсказания производились на основании периодов наблюдаемых затмений. Лунные затмения бывают часто сериями — по пяти-шесть затмений, причем между двумя последовательными затмениями проходил промежуток времени в шесть лунных меся-

цев: в начале серии происходило одно-два частных затмения, в середине — два полных, в конце — одно-два частных. Серии разделялись промежутками в 17 месяцев без затмений. Такая серийность наблюдалась, однако, не всегда, но она имела место между 755—432 гг. до н. э.; к этому промежутку относятся упомянутые царствования Асаргаддона и Ашурбанипала, знаменитое предсказание затмения Фалесом Милетским, а также упоминаемая в «Альмагесте» эра Набонассара, начало которой падает на 746 год. С этого года, вероятно, было упорядочено ведение астрономических наблюдений и хранение их результатов. Царствования Асаргаддона и Ашурбанипала соответствуют 681—625 гг. до н. э., а затмение Фалеса большинство исследователей относят к 585 г. до н. э.

К этому же времени относится записанный около 750 г. до н. э. в Ассирии большой астрономический текст Mul APIN, представляющий интерес тем, что в нем впервые появляются зодиакальные созвездия, но как раз не в качестве знаков зодиака, а в виде так называемых лунных домов. В нем описываются звезды, которые стоят на пути Сина (Луны): их пределы Син проходит в течение месяца и оставляет их за собой. Эти звезды имеют такие названия: Плеяды, Телец, Орион, Персей, Возничий, Близнецы, Рак, Лев, Дева, Весы, Скорпион, Стрелец, Козерог, Водолей, Западная и Восточная Рыбы, Овен. Из них возник зодиакальный пояс.

Древних вавилонян интересовало движение Луны за время полного оборота; движение Луны через эти созвездия они могли наблюдать непосредственно, чего нельзя сказать о движении Солнца. Зодиакальный пояс они определили позднее, когда перешли к изучению движения планет, но поскольку зодиак был известен греку Клеострату Тенедосскому, жившему около 550 г. до н. э., то можно сказать, что перечень знаков зодиака был составлен примерно около 600 г. до н. э. На это указывают новые «божественные» названия планет, которые через греков и римлян дошли до нас. Планета Венера — Афродита (вавилонская Иштар) получила свое «божественное» название очень давно, еще при шумерийцах (III—II тысячелетие до н. э.), когда она вместе с богом Луны Сином и богом Солнца Шамашем составила божественную триаду. Четыре остальные планеты у ассирийских астрологов VIII—VII вв. до н. э. носили такие названия: Сатурн назывался Kaīmanu, Юпитер — Mulu Babbar, Марс — Zalbatanu, Меркурий — Bibbu. Позднее эти планеты получили названия по именам божеств: Юпитер — Мардук (городской бог Вавилона), Марс — Нергал (бог войны и чумы, городской бог Сиппара и Куты), Сатурн — Нинурта (бог осеннего Солнца, библейский дикий охотник Немрод, городской бог Ниппура, древнейшего шумерийского центра), Меркурий — Набу (бог Борсиппы — предместья Вавилона, бог письма и науки, секретарь Мардука).

То обстоятельство, что самая яркая планета после Венеры посвящена не Ассуру, верховному богу Ассирии, а городскому богу Вавилона, показывает, что эти названия появились после возникновения Нововавилонского царства, расцвет которого приходится на время Навуходоносор (604—561). Все четыре города, городские

боги которых дали имя планетам, были местами ведения астрономических наблюдений: Вавилон, Борсиппа, Сиппар в рассматриваемое время, а Ниппур — в древнесумерийское. Иными словами, Нинурта (бог осеннего Солнца) находился к Мардуку (городскому богу Вавилона) примерно в таком же отношении, как Сатурн — Крон к Юпитеру — Зевсу. Четвертый центр астрономических наблюдений Урук (от которого тоже имеются астрономические тексты) имел городского бога Иштар.

Установление периодичности астрономических явлений было одной из главных задач вавилонской астрономии. Серьезная работа по определению этих периодов началась примерно со второй половины VI в. до н. э.; она была необходимой для правильной организации вавилонского лунно-солнечного календаря.

Известно, что основой вавилонского исчисления времени был синодический месяц — от одного новолуния до следующего, продолжительность которого составляла приблизительно  $29\frac{1}{2}$  суток. Так как 12 синодических месяцев составляли всего лишь 354 дня, а солнечный тропический год, определяющий распорядок сельскохозяйственных работ, равняется  $365\frac{1}{4}$  суток, то для соответствия их надо было иногда вставлять дополнительный 13-й (несчастливый) месяц. Эти вставки первоначально производились случайно — по велению верховного жреца или царя, но с VI в. до н. э., или, точнее, с момента образования персидской монархии, регулировка вставок получила общемперское значение.

Отношение продолжительностей синодического месяца (29,531 дня) и тропического года (365,242 дня) можно изобразить непрерывной дробью и взять от нее ряд подходящих дробей: числители этих дробей представляют числа лет, а знаменатели — соответствующие числа синодических месяцев:

$$1 : 12; 2 : 25; 3 : 37; 8 : 99; 11 : 136; 19 : 235; 334 : 4131.$$

Первые три соотношения дают очень грубое приближение, а седьмое и все следующие содержат слишком большое число лет и поэтому практически совершенно непригодны. Таким образом, нужно рассматривать только следующие отношения:

$$8 : 99;$$

$$11 : 136;$$

$$19 : 235.$$

К ним можно добавить еще два отношения, полученные в результате сложения предыдущих и последующих членов рассматриваемых отношений, а именно

$$\frac{8+19}{99+235} = \frac{27}{334} \text{ и } \frac{11+19}{136+235} = \frac{30}{371}.$$

От Нововавилонского царства, а также от эпохи персидской империи осталось большое количество деловых документов, датированных годами и месяцами. Вавилонский год начинался с нисана

(приблизительно с марта), а вставной месяц помещался или после 6-го месяца (второй элул) или после 12-го (второй адар). Так как вавилонский год начинался на три месяца позже нашего, то обозначим его двумя числами (например, 611—610 — начинающийся 1 нисана 611 г. и заканчивающийся 30 адара 610 г.). Если разделить дату каждого года на число лет в рассматриваемом цикле, т. е. 8, 11, 19, 27 или 30, и отметить остатки, соответствующие вставным годам, то получим столько же следующих циклически друг за другом различных остатков, сколько вставных годов в рассматриваемом цикле (если вставной месяц был элул, то нужно делить первую дату года — в вышеприведенном примере 611, а если вставной месяц был адар, то вторую — 610).

Наличие циклических остатков при делении на число лет в цикле служит признаком того, что данный цикл в действительности и употреблялся. Оказалось, что для первой половины VI в. до н. э. нельзя подметить какого-нибудь правильного применения регулирующего цикла вставных годов; начиная с 544/3 года можно подозревать употребление октаэтериды, которая исчезает полностью после 527/6 года. Для V в. до н. э. нельзя решить, какой из циклов был в употреблении: 19-летний или 27-летний, но начиная с 372 г. до н. э. единственным употреблявшимся циклом был 19-летний, дающий ошибку в один день только по истечении 11 циклов, или  $19 \times 11 = 209$  лет. В еврейском календаре этот цикл употребляется и в наше время.

Самой ранней из известных сейчас астрономических вычисленных таблиц была астрономическая афемерида для 523 г. до н. э., определяющая движение Луны; она интересна в том отношении, что некоторые ее части должны быть наверняка предвычислены.

Возникает вопрос, какие факторы способствовали развитию астрономии в VI в. до н. э. Время, протекшее от возвышения Ассирии (примерно IX в. до н. э.) до возникновения Римской империи (битва при Акции, 30 г. до н. э.), можно определить как время, посвященное процессу объединения стран, окружающих Средиземное море. Это время соответствовало полному развитию так называемого железного века, характерными представителями которого являются ассирийцы и греки, а также рабовладения античного типа.

Государствами-объединителями выступали последовательно Ассирия (IX—VII вв. до н. э.), Новоавилонское царство (VI в. до н. э.), Персия (VI—IV вв.), эллинистические государства и Рим. Это объединение не только положило конец существованию мелких государств Сирии и Двуречья, но и произвело чистку божественного пантеона этих стран; народы потеряли веру в могущество своих племенных божеств, которых считали верховными правителями своих стран. В VI в. создаются универсальные религии: маздеизм в Иране, еврейская религия в Палестине, буддизм в Индии, философские системы Конфуция и Лао-Цзы в Китае. На смену религии приходит наука — начинается изучение процессов природы; люди перестают верить, что «Зевс дождит», и начинают искать более естественные объяснения. В Греции создаются философские школы,

которые ищут начала всех вещей в воде (Фалес), в воздухе (Анаксимен), в огне (Гераклит), но никоим образом не в «матери сырой земле» — краеугольном камне всех земледельческих религий.

Объединительный процесс сопровождался большими страданиями народов и пессимистическими настроениями. Особенно обострился этот процесс, когда после мелких государств были завоеваны мидянами и персами такие крупные, как Ассирия и Вавилония. Народы начинали искать выхода если не в настоящем, то по крайней мере в более или менее отдаленном будущем. Жители Двуречья помещали своих богов на планеты, делая их простыми вестниками фатума — верховной Судьбы.

Вера в периодичность мировых явлений, прежде всего небесных, а самое главное — возможность их предсказания, предвычисления способствовали развитию вычислительной астрономии, которая, таким образом, как бы оправдывала расцветавшую пышным цветом астрологию; в Двуречье она касалась только судеб государств, но в Греции, где каждый стремился наиболее ярко выразить свою индивидуальность, от астрологии начали требовать и предсказания судеб отдельных личностей. В результате этих смутных стремлений возник один из краеугольных камней современной науки; если Греция заменила истину откровения истиной логического доказательства, то вавилонской науке принадлежит честь установления принципа, что естественноисторические процессы могут быть выражены математически.

Расцвет вавилонской астрономии, если судить по количеству дошедших до нас астрономических документов, относится примерно к промежутку 300—150 гг. до н. э. Методика вавилонских астрономов значительно отличалась от современной; сейчас рассматривают движение исследуемого светила как движение некоторой материальной точки; вавилонян же интересовали главным образом геометрические точки — места, которым соответствовали характерные положения светил: соединение, противостояние планет, перемещение точек пересечения орбиты Луны с эклипкой, восходящий и нисходящий узлы и т. д. Для этих явлений («фаз») определялись в первую очередь их периоды; особенно хорошо были изучены периоды движений Луны и Солнца.

Описание движения планеты сводится к описанию перемещений последовательных фаз планеты. Разность долгот между двумя последовательными фазами называется синодической дугой. Предположим, что для каждой фазы известны синодические дуги и соответствующие им периоды; тогда можно определить последовательные долготы и времена повторения каждой фазы. Эти пять фаз составляют такую последовательность:

- 1) первая видимость (гелиакический восход);
- 2) первое стояние;
- 3) оппозиция;
- 4) второе стояние и
- 5) последняя видимость (гелиакический заход).

Таким образом, получается календарное описание движения

планеты за весь период времени, по истечении которого повторяется первоначальная комбинация пяти фаз. Вычисления осложняются тем обстоятельством, что длины синодических дуг, а также соответствующие времена не остаются постоянными, а зависят от положения светила на эклиптике. Самый простой способ учета этих особенностей состоит в том, что эклиптика делится на некоторое число частей, для каждой из которых определяется величина синодической дуги и время синодического оборота.

Поскольку вавилоняне интересовались главным образом астрологической стороной вопроса, то естественно, что его физическая сущность оставалась нераскрытой. У них нет никаких данных относительно величин и расстояний небесных светил, хотя им было известно, что видимый диаметр Луны не всегда одинаков; он изменялся между  $34'16''$  и  $29'27''$  (современные значения  $32'55''$  и  $29'30''$ ). Вавилонский жрец Берос, бывший одним из распространителей вавилонской науки в Греции (вторая половина IV в. до н. э.), объяснял фазы Луны тем, что одна половина шара Луны является светящаяся, а другая темная, в то время как правильное объяснение было известно грекам еще за сто лет до Бероса (Анаксагор).

Однако Берос не был первым, познакомившим греков с достижениями вавилонской астрономии; вавилонская наука была известна грекам по крайней мере за полвека до Бероса, т. е. примерно между временами Платона и Аристотеля. Платон еще употреблял так называемые пифагорейские названия планет: Меркурий (Стильбон), Венера (Фосфор и Геспер), Марс (Пироент), Юпитер (Фазтон), Сатурн (Файнон); у Аристотеля же планеты носили названия: звезда Гермеса, звезда Афродиты, Ареса, Зевса и Крона, — представляющие собой перевод на греческий язык вавилонских «божественных» названий. Нельзя сказать, что вавилонская астрология встретила у греков благоприятный прием: Евдокс Книдский определенно утверждал, что халдейским предсказаниям нельзя верить. Он даже создал кинематическую картину строения Солнечной системы, заменив детерминизм фатума законом механических движений.

Деятельность Евдокса относится к первой половине IV в. до н. э. (примерно 400—344 гг. до н. э.). Это — один из величайших греческих математиков. Он родился на острове Книде, изучал математику у Архита Тарентского и на 23 году жизни приехал в Афины изучать философию у Платона. Спартанский царь Агесилай дал ему рекомендацию к египетскому фараону Нектанебу; в Египте он изучал астрономию в Гелиополе и производил наблюдения в обсерватории, которая существовала еще в эпоху императора Августа. Затем в Кизике на Мраморном море он основал математическую и философскую школы.

В области математики Евдоксу принадлежит метод исчерпания, которым пользовался Архимед при определении площадей и объемов криволинейных тел. Ему также принадлежит изложенная в 5-й книге Евклида теория отношений несоизмеримых величин, все значение которой было понято в Европе только во второй полови-

не XIX в., после работ Дедекинда об иррациональных числах. Он занимался решением задачи об удвоении куба и в связи с этим произвел разделение кривых на два класса: сечения и геликоидальные кривые. Геликоидальными кривыми Евдокс называл некоторые кривые, получающиеся в результате движения: к числу их относятся спираль Архимеда, квадратриса Динострата, гиппопеда Евдокса. Венцом его славы является решение задачи, поставленной Платоном перед астрономами, — каким образом можно объяснить планетные явления при помощи равномерных упорядоченных круговых движений. Так была создана первая механическая модель планетных движений, а именно: теория гомоцентрических сфер.

Согласно этой теории движения небесных светил получались в результате вращения различных сфер, центр которых совпадал с центром неподвижной Земли. Исходным было, конечно, суточное вращение небесного свода, которым греки объясняли движения (восход и заход) неподвижных звезд. Для Солнца и Луны одного этого вращения уже не было достаточно: требовалось объяснить видимое перемещение этих светил по отношению к небесному своду.

Отмечая последовательные положения Солнца среди неподвижных звезд (естественно, что для этого, кроме наблюдений, требовалось и некоторое вычисление), можно было установить, что Солнце в течение года описывает большой круг небесного свода, так называемую *эклиптику*. Это движение можно было представить, поместив Солнце на некоторую сферу с центром в неподвижной Земле и заставив эту сферу вращаться с запада на восток вокруг полюсов эклиптики; при помощи сложения двух этих вращений вполне удовлетворительно объяснялось видимое движение Солнца. Эклиптика на небесном своде являлась основной линией, по отношению к которой определялось положение Луны и других планет.

Аналогично можно было наметить на небесном своде и траекторию Луны, которая представляла тоже некоторый большой круг сферы, пересекающийся эклиптикой в так называемых узлах. Если бы эта траектория была неподвижной по отношению к эклиптике, то движение Луны можно было бы представить введя третью сферу; полюсы этой сферы находились бы на второй сфере, на которой начерчена эклиптика. Поместив Луну на этой сфере и заставив ее вращаться вокруг ее полюса в течение  $27\frac{1}{2}$  дней (продолжительность сидерического обращения Луны), можно было бы представить видимое движение Луны.

Но оказалось, что точки пересечения лунной траектории эклиптикой (узлы) перемещаются по эклиптике приблизительно за 19 лет. Тогда движение Луны можно было бы объяснить при помощи введения трех сфер: первая, вращающаяся вокруг полюсов мира, представила бы суточное движение; вокруг полюсов эклиптики вращалась бы вторая сфера, несшая лунную траекторию, а на этой сфере помещались бы полюсы третьей сферы, вращение которой определяло полностью видимое движение Луны. Таким образом, для Луны потребовалось бы введение трех сфер, для Солнца вполне достаточно двух сфер, но Евдокс ввел еще третью, как и для Луны.

Если бы планеты равномерно двигались по небесному своду каждая по своей траектории, то для описания движения каждой такой планеты хватило бы трех таких сфер. Но движение планет по своим траекториям не является равномерным: они иногда движутся вперед, стоят на месте и отходят назад. Это движение можно было бы представить, добавив к движению второй сферы некоторое гармоническое колебание вокруг неподвижного центра на третьей сфере, но перемещающегося вместе с ее движением по второй сфере, несущей траекторию планеты. Это гармоническое колебание на плоскости можно получить при помощи механизма эллипсографа (карданова движения), или кривошипно-шатунного механизма, в котором длина кривошипа и шатуна одинаковы. Если прямая  $Ox$  представляет траекторию точки, то колебательное движение точки  $B$  около центра  $O$  можно описать при помощи формулы (рис. 11)

$$OB = x = 2a \cos \omega t.$$

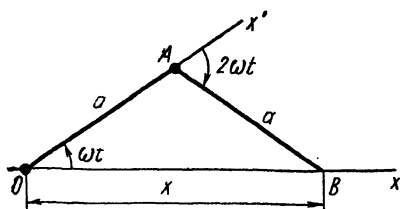


Рис. 11

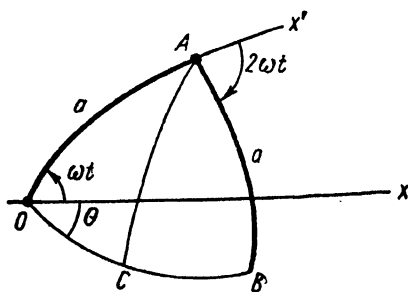


Рис. 12

Это получалось как результат сложения двух вращений: одно из них представляет вращение прямой  $OAx'$  вокруг центра  $O$  с угловой скоростью  $\omega$  так, что угол  $xOA$  равняется  $\omega t$ ; второе вращение совершает прямая  $AB$  вокруг центра  $A$  в противоположную сторону с угловой скоростью  $2\omega$  так, что угол  $BAx'$  равняется  $2\omega t$ , а угол  $ABO = \omega t$ ; в таком случае движение точки  $B$  описывается вышеприведенной формулой.

Карданово движение Евдокс употреблял для описания прямых и обратных движений планеты. Разница была только в том, что их движение совершалось не на плоскости, а на сферической поверхности, и прямые  $Ox$  и  $OA$  были заменены дугами больших кругов; в этом случае точка  $B$  (планета) двигалась бы не по прямой  $Ox$ , а по некоторой кривой в виде восьмерки, ветви которой взаимно касались в точке  $O$ , а крайние точки находились от  $O$  на одинаковых расстояниях в ту и другую сторону.

Пусть  $Ox$  — эклиптика, точка  $O$  — среднее положение планеты, являющееся центром вращения третьей сферы; угловая скорость  $\omega$  этого движения соответствует синодическому обороту планеты.

Точка  $A$  является центром вращения четвертой сферы, которое совершается с угловой скоростью  $2\omega$  вокруг центра  $A$  по отношению к третьей сфере. Дуга  $OA$  определяет угол наклона между осями третьей и четвертой сфер (рис. 12).

Предположим, что в начальный момент центры  $O, A, B$  в указанном порядке располагаются на эклиптике  $Ox$ . Точка  $B$  соответствует крайнему отклонению от точки  $O$ ; если оно известно, то, поскольку  $OA = AB$ , легко определим величину дуги  $a$ , измеряющей угол между осями вращения третьей и четвертой сфер. Пусть теперь третья сфера начинает вращаться вокруг точки  $O$  против движения часовой стрелки с угловой скоростью  $\omega$  (угол  $AOx = \omega t$ ), а четвертая сфера — вокруг точки  $A$  в противоположную сторону с удвоенной скоростью  $2\omega$  (угол  $x'AB = 2\omega t$ ). Если бы движение происходило на плоскости, то точка  $B$  двигалась бы все время по  $Ox$ . В сферическом движении этого не происходит; можно показать, что планета  $B$  окажется ниже эклиптики  $Ox$ .

Рассмотрим равнобедренный треугольник  $OAB$  и из вершины  $A$  опустим сферический перпендикуляр  $AC$  на основание  $OB$ . Дуга  $OB$  представляет сферический радиус-вектор планеты  $B$ , а угол  $BOx' = \Theta$  — сферический полярный угол планеты. Угол  $OAB$  равен  $\pi - 2\omega t$ , а его половина  $OAC = \frac{\pi}{2} - \omega t$ . Известно, что сумма углов сферического треугольника больше  $\pi$ ; в треугольнике  $OAC$  сумма углов равна

$$(\omega t + \Theta) + \left(\frac{\pi}{2} - \omega t\right) + \frac{\pi}{2} = \pi + \Theta.$$

Таким образом  $\Theta > 0$ ; это есть так называемый сферический избыток, измеряющий площадь треугольника. В начальный момент, когда  $OAB$  лежит на  $Ox$ , площадь треугольника  $OAB$  равняется нулю; значит угол  $\Theta$  равняется нулю и точка  $B$  находится на  $Ox$ . Когда угол  $AOx'$  увеличивается, площадь сферического треугольника  $OAB$ , а следовательно, и угол  $\Theta$  возрастают, и точка  $B$  опускается все ниже и ниже под эклиптикой. Когда площадь  $OAB$  получает максимальную величину, то и точка  $B$  занимает самое низкое положение. После этого площадь  $OAB$  уменьшается, а  $B$  приближается к эклиптике. По истечении четверти периода кривая  $OA$  перпендикулярна к эклиптике; площадь  $OAB$  равна нулю и точка  $B$  (планета) оказывается в точке  $O$ . За это время точка  $B$  описывает под осью  $Ox$  дугу вогнутой кривой (гиппопеда).

Когда угол  $\omega t$  изменяется от  $\frac{\pi}{2}$  до  $\pi$  (вторая четверть), то точка  $B$ , находясь ниже эклиптики, описывает такую же дугу гиппопеды, симметричную первой. Через половину периода дуга  $OA$  оказывается ниже  $Ox$ , и гиппопеда располагается выше эклиптики, занимая положение, симметричное относительно  $Ox$ . Таким образом, получаем кривую вроде восьмерки, но только верхняя и нижняя ветви в средней точке  $O$  не пересекаются, а касаются друг друга. У Скъяпарелли и всех последователей обе ветки пересека-

лись, так что получалась настоящая восьмерка. Указанное различие в форме гиппопеды объясняется тем, что в исследованиях Скъяпарелли имеются две ошибки.

То обстоятельство, что в движении по гиппопедке планета должна отклоняться от эклиптики, заставляло предполагать, что при ее помощи можно объяснить отклонения планеты по широте.

В действительности методика вычисления отклонений по широте была создана только во II в. н. э. Птолемеем. Во времена Евдокса лишь одни вавилоняне занимались изучением движения по широте, и то лишь одной Луны; для других планет рассматривались только движения по долготе — единственное, что было нужно для составления предсказаний, и гиппопедка служила только для более точного определения движения планеты по долготе.

Кроме того, Скъяпарелли считал также, что положение планеты на четвертой сфере должно обязательно быть на ее экваторе, иными словами, дуга *AB* должна обязательно равняться  $90^\circ$ ; ни у Аристотеля, ни у Симпликия (источников Скъяпарелли) об этом (во всяком случае достаточно ясно) не говорится.

Таким образом, движение планеты определяется четырьмя сферами: первая — сфера неподвижных звезд — перемещает начерченную на ней траекторию планеты, вторая с периодом сидерического обращения описывает среднее движение (изменение долготы) планеты, а третья и четвертая объясняют прямые и обратные движения.

В систему Евдокса входили шесть сфер для Луны и Солнца, 20 для пяти планет и одна для неподвижных звезд. Движения всех этих сфер Евдокс считал независимыми друг от друга, иными словами, его система была простой кинематической. Позднее ученик Евдокса Каллипп объединил все эти сферы в единую систему, введя некоторые дополнительные сферы, но не изменяя общего принципа движения всей системы. Эта система получила одобрение Аристотеля и поэтому вместе с его философией признавалась вплоть до эпохи Коперника.

Можно задать вопрос: в какой мере система Евдокса могла удовлетворить наблюдаемым движениям? Так как центром всех сфер была Земля, то яркость планеты должна быть все время одинаковой, что совершенно не характерно для Марса и Венеры, так как именно у этих планет замечаются большие различия в яркости. Поэтому уже в ближайшее после Евдокса время появились другие теории планетных движений. Первая из них была предложена учеником Платона Гераклидом Понтийским, который, исходя из того, что планеты Меркурий и Венера не могут удаляться от Солнца на любое расстояние, предположил, что обе эти так называемые нижние планеты движутся вокруг Солнца, чем объясняются также и различия в блеске Венеры. Эта теория Гераклида была общепринятой вплоть до эпохи Птолемея и даже немного позже; последнее упоминание о ней (уже без имени Гераклида) встречается у писателя V в. н. э. Макробия. Кроме того, Гераклиду принадлежит также объяснение суточного движения небесного свода вращением Земли вокруг своей оси.

Сложнее обстоит дело с объяснением видимого движения Марса, у которого эпохи наибольшего блеска совпадают с временами противостояний, т. е. соответствуют положениям, когда планета занимает на зодиаке место, прямо противоположное Солнцу. В этом случае наиболее близкая к Земле точка орбиты этой планеты находится в направлении, прямо противоположном Солнцу. Это значит, что центр кругового движения планеты помещен вне Земли; таким образом появилось понятие о так называемом эксцентре.

Пусть  $T$  — место Земли в центре мира, а круг  $QR$  представляет эксцентрический круг, имеющий центр в точке  $O$  (рис. 13). Если

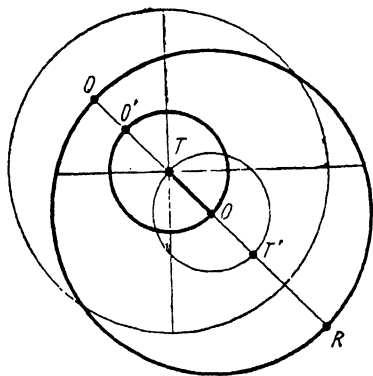


Рис. 13

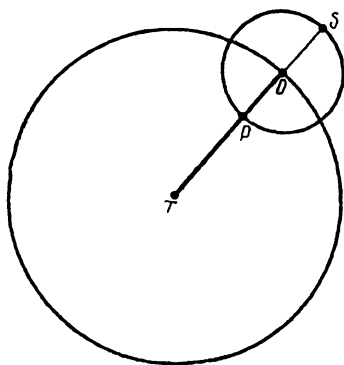


Рис. 14

через  $T$  и  $O$  провести диаметр  $QR$ , то точка  $Q$  будет, очевидно, соответствовать минимальному расстоянию от Земли, или так называемому перигею, в противостояниях  $Q$  Марс находится в направлении, противоположном Солнцу. Противостояния Марса возможны в любых созвездиях зодиака: это значит, что направление минимального расстояния  $TQ$  не является постоянным, иными словами, диаметр  $RQ$  эксцентра должен вращаться вокруг неподвижной точки  $T$ , причем перигейная точка  $Q$  остается всегда противоположной Солнцу. Одновременно вокруг Земли должен вращаться и центр  $O$  эксцентра, а следовательно, и весь эксцентр.

Так как направление от  $T$  к  $O$  всегда совпадает с направлением к Солнцу, то можно предположить, что центр  $O$  совпадает с центром Солнца, тем более, что круговращение вокруг идеальных геометрических точек в те времена не считалось возможным рассматривать. Поэтому естественно предположить, что Марс, как и Венера с Меркурием, совершает круговое обращение вокруг Солнца; то же самое можно применить и к остальным верхним планетам — Юпитеру и Сатурну. Получается система, которую во второй половине XVI в. предложил датский астроном Тихо Браге; все планеты вращаются вокруг Солнца, а Солнце в свою очередь вращается вокруг Земли.

Если рассмотреть и систему Гераклида Понтийского для Венеры и Меркурия, то, кроме эксцента, получим еще одну модель планетных движений (рис. 14) — эпицикл  $PS$ , по которому движется нижняя планета вокруг Солнца  $O$ . Оба понятия — эксцентр и эпицикл — встречаются впервые у младшего современника Архимеда, Аполлония Пергского, автора «Конических сечений». Окружность, по которой перемещается центр  $O$  эпицикла, носит название деферента. Аполлоний показал, что движение любой планеты можно получить при помощи как первой, так и второй модели. С точки зрения кинематики это равносильно движению шарнирного параллелограмма.

Пусть  $O$  (рис. 15) — неподвижная точка,  $S$  — планета, движение которой следует описать. Это можно сделать при помощи подвижного эксцента, радиус которого  $AS$ , а центр  $A$ , а также при помощи эпицикла радиусом  $BS$  и центром  $B$ ; все будет зависеть только от порядка, в котором складываются вращения: порядок  $\omega_1 \rightarrow \omega_2$  соответствует модели эксцента, а порядок  $\omega_2 \rightarrow \omega_1$  модели эпицикла.

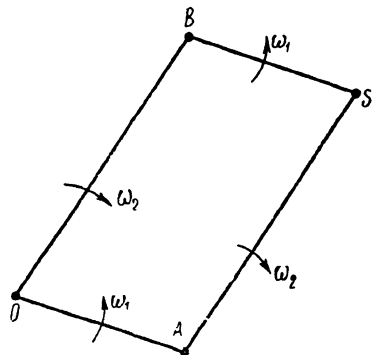


Рис. 15

Рассмотрим опять рис. 13, изображавший модель подвижного эксцента, где планета (Марс) вращалась вокруг Солнца  $O$ , а Солнце — вокруг Земли  $T$ . Из этих двух точек  $T$  и  $O$  неподвижной являлась точка  $T$ , а также орбита  $OO'$  Солнца. В качестве неподвижной можно взять и точку  $O$ ; тогда Земля будет описывать окружность  $TT'$  вокруг центра  $O$ , а эксцентр  $QR$  представит неподвижную орбиту Марса вокруг Солнца. Кинематически обе системы вполне эквивалентны, но вторая система получает название системы Аристарха Самосского.

Кто придумал обе кинематические системы? Что касается эпицикла, то с полной уверенностью можно утверждать, что его автором является Гераклид Понтийский. Скъяпарелли считал, что систему эксцента мог придумать современник Гераклида или даже сам Гераклид; во всяком случае эта система была изобретена не позже Аристарха. Можно предположить, что ее создал сам Аристарх. Этот великий астроном древности написал сочинение «Об определении величин и расстояний Солнца, Луны и Земли». Так как лунные затмения происходят в то время, когда Земля находится на одной линии с Солнцем и Луной, то Луна попадает в тень, отбрасываемую Землей. Проведем конус общих касательных к сферам Солнца и Земли и определим, с какой стороны будет находиться вершина этого конуса. Зная продолжительность полного затмения, можно вычислить величину диаметра земной тени на расстоянии Луны; он оказывается меньше диаметра Земли. Это значит, что вершина конуса земной тени лежит в той же стороне от Земли, что

и Луна; следовательно, диаметр Солнца больше диаметра Земли. Это и было установлено Аристархом в названном выше сочинении; причем из текста этого сочинения можно установить, что во время его написания Аристарх придерживался еще геоцентрических воззрений. Но если диаметр Солнца больше диаметра Земли по Аристарху примерно в семь раз, то это значит, что объем Солнца в 343 раза больше объема Земли; тогда из двух возможных предположений — геоцентрической и гелиоцентрической системы — наиболее вероятным является второе, которое и было принято Аристархом.

В таком случае возникает естественный вопрос: почему же гелиоцентрическая система Аристарха была отброшена в процессе развития астрономии? Обычное объяснение заключается в том, что Аристарха постигла та же судьба, что и Галилея. Глава стоиков Клеанф предъявил ему обвинение в безбожии за то, что он сдвинул с места очаг (Гестию) Вселенной. Для характеристики воззрений стоиков служит теория Фатума, подкрепленная астрономическими или, точнее, астрологическими теориями вавилонских астрономов. Действительно, римское завоевание произвело в греческом мире те же самые пессимистические воззрения, что и в Вавилоне VII—VI вв. до н. э. В эпоху Клеанфа положение, по крайней мере в отношении Рима, еще не было угрожающим по сравнению с тем, что настало во II в. до н. э.; кроме того, более вероятно, что Клеанф удовлетворялся написанием книги «Против Аристарха», о которой в «Жизнеописаниях философов» упоминает Диоген Лаэртский.

Но были и другие факторы, которые не позволили теории Аристарха получить общее признание. Ее основными положениями были два следующих:

- 1) все планеты должны вращаться вокруг центрального материального тела;
- 2) эти круговые вращения должны быть равномерными.

Оказалось, что оба положения Аристарха были несовместимыми. Нельзя было доказать, что вращение Солнца вокруг Земли или Земли вокруг Солнца является равномерным.

Еще до Евдокса греческие астрономы Метон и Евктемон показали, что продолжительность астрономических времен года, т. е. промежутков от равноденствий до солнцестояний, не одинакова; после же Аристарха эта неравномерность стала очевидным и общепризнанным фактом. Если признать, что небесные движения являются круговыми и равномерными, то нужно было отвергнуть его первое положение, а именно: считать, что центром вращения должно быть материальное тело.

Через сто лет после Аристарха никейский астроном Гиппарх разработал теорию движения Солнца. По этой теории Солнце об-

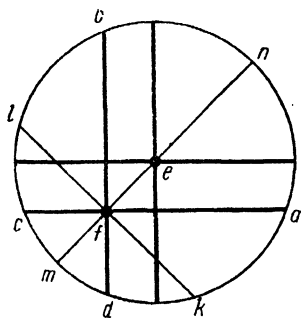


Рис. 16

ращается не вокруг Земли, а вокруг центра некоторого круга, эксцентрического по отношению к Земле — так называемого неподвижного эксцентра\*.

Рассуждения Гиппарха сводились к следующему (рис. 16).

Пусть от весеннего равноденствия до солнцестояния проходит  $94\frac{1}{2}$  дня, а от солнцестояния до осеннего равноденствия —  $92\frac{1}{2}$  дня; среднее равномерное движение в первом промежутке  $93^{\circ}9'$ , а во втором  $91^{\circ}10'$ . Построим круг с центром  $e$ ; отложим дуги  $ab = 93^{\circ}9'$  и  $bc = 91^{\circ}10'$  и проведем взаимно перпендикулярные прямые  $ac$  и  $bd$ , пересекающиеся в точке  $f$ . Будем считать, что в точке  $f$  находится Земля, в точке  $a$  — Солнце в момент весеннего равноденствия, в  $b$  — оно же в момент летнего солнцестояния, и в  $c$  — в момент осеннего равноденствия. Определим положение  $e$  — центра эксцентрического круга; соединив  $f$  с  $e$ , получим линию апсид  $nm$ . Точка  $n$  будет апогеем, а  $m$  — перигеем. Движение Солнца — равномерное вокруг  $e$  — не будет казаться равномерным из  $f$ .

Линию апсид  $mn$  первоначально считали неизменной (отсюда и название «неподвижный эксцентр»), но арабские астрономы показали, что линия апсид перемещается. Если через  $f$  проведем прямую, перпендикулярную к  $mn$ , то на дуге  $knl$  движение будет более медленным, чем среднее, а на  $lmk$  — более быстрым; вблизи точек  $k$  и  $l$  дневное перемещение Солнца равно среднему.

Таким образом, в механику вошло понятие о неравномерном движении. Общий метод исследования движения планеты был следующий: сначала определялось среднее движение планеты по долготе, а затем к нему прибавлялись два неравенства, или, как их называли греки, аномалии. Первым неравенством было так называемое «неравенство по отношению к Солнцу»; оно происходило от того, что наблюдения производились с Земли, движущейся вокруг Солнца; это неравенство исправлялось при помощи эпицикла. Второе неравенство, обусловленное неравномерностью движения планеты по орбите, называлось «неравенством в отношении зодиака» и исправлялось при помощи эксцентра, как показано выше.

Эта методика вместе с теорией движения планет была создана во II в. н. э. александрийским астрономом Клавдием Птолемеем (Гиппарх ограничился только теорией движения Солнца). В эпоху Птолемея уже произошло полное развитие астрологии, которая повлияла и на астрономию Птолемея. В средние века вплоть до Коперника его книга, носившая арабизированное название «Альмагест — Величайший», оценивалась как одно из самых больших достижений астрономии.

После Коперника стали критиковать Птолемея, прежде всего за его геоцентризм. С другой стороны, защитники Птолемея считали ряд астрологических сочинений, носящих его имя (Четверокнижие — *Tetrabyblon* и др.), ему не принадлежащими. Астрологизм Птолемея совершенно несомненен, даже если ограничиться одним

\* Через восемнадцать веков после Гиппарха Кеплер поступил как раз наоборот: по его теории планеты вращаются вокруг центрального материального тела — Солнца, но равномерное круговое движение он заменил эллиптическим.

только «Альмагестом». Он отвергает суточное вращение Земли, причем сама обстоятельность его критики показывает, что в его время эта теория была довольно распространенной; он считает, что Меркурий и Венера вращаются вокруг Земли, хотя с чисто конструктивной стороны это представляло порядочные неудобства (эпицикл Венеры получался очень большим); в теории затмений он наблюдает, с какой стороны Луна начинала затмеваться, указывая, что это имело большое значение для предсказаний.

Вся теория движения Солнца им изложена по Гиппарху, что видно хотя бы из довольно значительного количества наблюдений, произведенных в Родосе, где одно время работал Гиппарх. Что же касается теории движения планет, то она представляет собственное создание Птолемея, в особенности теории движений планет по широте, которая до него не затрагивалась даже вавилонскими астрономами. Его критикуют за сделанную им ошибку в  $4-5^\circ$  при определении положения солнечных апсид, но поскольку это определение основывалось на величинах продолжительностей времен года, которые давались с точностью лишь до половины дня, то получение хороших результатов могло быть обусловлено только случайностью.

Общенаучная ценность «Альмагеста» заключается в методике его исследований движения планеты. Прежде всего делается выбор модели: эксцентр, эпицикл один или несколько; затем из потребного числа наблюдений определяются геометрические параметры орбиты, на их основе вычисляется последовательность положений планеты и результаты сверяются с наблюдениями. Такая методика характерна для всех физико-математических наук — могут изменяться лишь гипотезы и предположения.

## ЭЛЛИНИСТИЧЕСКАЯ МЕХАНИКА. МАШИНЫ. ЗОЛОТОЕ ПРАВИЛО МЕХАНИКИ

В эллинистическую эпоху (330—300 гг. до н. э.) и в последующую за ней эпоху Римской империи уже не встречается крупных теоретических или философских обобщений. В области науки, и в частности в механике, имеются приложения на практике результатов, полученных в предшествующую классическую эпоху.

Появляются большие энциклопедические сочинения, охватывающие всю механику, или популярные сборники, содержащие различные более или менее «интересные вопросы»; такова большая серия «Проблем» (к их числу относятся дошедшие до нас в виде отдельного сборника «Механические проблемы»). Кроме того, имеется большое число специальной военной литературы, описывающей конструкцию военных машин.

Первым автором общей механики является *Филон Византийский* (около 270—220 гг. до н. э.), курс которой состоял из девяти книг. Первая книга, посвященная чистой механике, представляла общее введение; во второй излагалось учение о рычаге; содержание обеих этих книг можно восстановить по недавно найденной механике Ге-

рона Александрийского. Третья книга была посвящена устройству гаваней, а в четвертой (Belopoica) рассматривалась конструкция метательных орудий; она сохранилась полностью. Отметим замечание автора, что «орудия должны быть красивыми». Пятая и шестая книги были посвящены пневматике и построению автоматов; их содержание можно восстановить по соответствующим книгам Герона. Седьмая и восьмая книги (из которых сохранились большие отрывки) были посвящены защите и осаде городов. Последняя, девятая книга (смесь) трактовала и вопросы тайнописи.

Содержание этих книг позволяет узнать интересы и содержание античной техники: военное дело, городское строительство, торговля и забавы — вот что было основными предметами занятий античного мира. На первом месте стояло военное дело; именно ему были посвящены дошедшие до нас части сочинения Филона. Затем шли книги, посвященные устройству автоматов и пневматических игрушек.

Примерно такой же характер носила и прикладная механика арабов с тем лишь отличием, что не имеется книг о баллистах и катапультах: арабская осадная «артиллерия» строилась на принципе пращи с использованием центробежной силы.

Вторым автором был талантливый энциклопедист *Герон Александрийский*. Он был настолько всеобъемлющим автором, что время его деятельности относилось к периоду от III в. до н. э. до I в. н. э. Он занимался практикой вычислений (недавно найдена «Метрика», в которой описано, каким образом в древности извлекались квадратные корни), элементами геометрии, теорией измерений (первая книга «О диоптрах», в которой описывался прибор для счета оборотов колес экипажа), общей механикой (три книги которой имеются в арабском переводе), военной механикой, автоматикой и пневматикой, а также оптикой. В «Пневматике» описывается «эолипил», основанный на принципе действия активной турбины. В «Метрике» находится знаменитая формула Герона для площади треугольника; недавние исследования показали, что эта формула была получена Архимедом.

Слава Герона была настолько велика, что книги с его именем имелись даже в византийскую эпоху (некоторые ученые даже предполагали существование Герона Младшего).

Время его деятельности было установлено очень недавно: профессор Нейгебауэр показал, что солнечное затмение, о котором упоминается в его книге «О диоптрах», было вероятно в 62 г. н. э., кроме того, в комментариях Евтокия к Архимеду упоминается книга Герона «Саматика» («О сводах»). Так как сирийская сводчатая архитектура проникла в Рим в начале II в. н. э. (перестройка Аполлодором пантеона Агриппы в Риме), то время деятельности Герона можно считать примерно около 100 г. н. э.

Наконец, необходимо рассмотреть еще одно произведение, время составления которого тоже не является вполне установленным: это приписываемое Аристотелю сочинение под названием «Механические проблемы». Не может быть сомнения в том, что это произведе-

ние вышло из школы Аристотеля, но основанная Аристотелем философская школа (так называемый Ликей) не была особенно долговечной.

После смерти Аристотеля его преемником был Теофраст (322—287 гг. до н. э.), затем Стратон Лампсакский (287—269 гг. до н. э.) — наиболее самостоятельный из последователей Аристотеля, получивший прозвище физика (известный французский историк науки Поль Таннери именно ему приписывает составление «Механических проблем»). При его преемнике Ликоне начинается упадок; аристотелизм теряет силу и вытесняется стоицизмом и эпикурейством; школа Аристотеля «засыпает на два столетия».

Возрождение аристотелизма начинается после находки в Афинах собрания его сочинений, которые в качестве военной добычи были перевезены Суллой в Рим и изданы одиннадцатым преемником Аристотеля Андроником Родосским, стоявшим в главе школы в 65—50 гг. до н. э. После этого начинается возрождение интереса к аристотелевой философии, особенно усилившееся во время Августа, консервативные стремления которого привели к восстановлению классицизма эпохи расцвета Афин за счет эллинистической литературы.

Наиболее ярким представителем нового аристотелизма был *Александр Афродизский* (вторая половина II в. н. э.), заслуживший титул «Комментатора». К этому времени можно отнести составление им сборника «*Problemata*» («Задачи»), помещаемого в полные собрания сочинений Аристотеля, но никоим образом не могущего ему принадлежать. Этот сборник состоит из ряда вопросов, относящихся к самым различным отраслям науки и философии; «Механические проблемы» разделяются на 35 глав (параграфов), каждая из которых содержит вопрос вместе с ответом. Большая часть этих вопросов касается теории рычага, но далеко не все из них получают ответ, который можно назвать правильным. Приведем несколько примеров (параграфов) из этого сочинения.

§ IV. По какой причине больше всех движут корабль гребцы, находящиеся в его середине?

— Может быть потому, что весло является рычагом; действительно, опорой будет уключина (ибо она неподвижна), поднимаемым грузом — вода, которое весло отталкивает, а движущим рычагом матрос. Более длинные части весел находятся в середине корабля внутри.

§ V По какой причине небольшое кормило, находящееся на самом конце судна, обладает такой мощностью, что при действии небольшой рукоятки силой одного человека и без напряжения приводятся в движение большие громады судов?

— Может быть потому, что кормило является рычагом, которым действует кормчий, опора получается там, где кормило прикрепляется к судну, оно же будет рычагом, море — поднимаемым грузом, а кормчий — движущим.

§ VI. По какой причине с увеличением высоты рей судно при тех же парусе и ветре будет плыть быстрее?

— Может быть потому, что мачта становится рычагом, скамья, в которой она закреплена, — опорой, судно — тяжестью, которую нужно привести в движение, а двигателем — ветер в парусе.

§ XVI По какой причине древко становится слабее при увеличении его длины и больше изгибается при подъеме даже, если древко короткое (например: в два локтя) было бы тонким, а длинное — в сто локтей — толстым?

— Может быть потому, что при подъеме начало древка, за которое держится рука, становится чем-то вроде опоры, а конец древка — грузом. Таким образом, чем больше та часть, которая начинается от опоры, тем по необходимости будет больше и изгиб.

§ XVII. По какой причине при помощи небольшого клина получается сильное давление и раздвигаются большие массы?

— Может быть потому, что клин представляет два рычага, которые противоположны друг другу; каждый имеет и груз и опору, которую он разрывает.

§ XIX. По какой причине, если на дерево наложить большой топор с большим грузом, дерево не разделится? Если же, подняв топор, ударить им дерево, то оно рассечется, хотя бы ударяющее тело имело значительно меньший вес, чем груз, наложенный на дерево и действующий только давлением.

— Может быть потому, что все приводится в действие движением и тяжелое тело лучше воспринимает движение от веса, двигаясь само, а не покоясь.

§ XXXII. По какой причине прекращается движение брошенных тел?

— Может быть потому, что иссякает бросившая сила или же вследствие противодействия, или же вследствие стремления книзу, если последнее больше бросившей силы?

§ XXXIII. По какой причине какое-нибудь тело движется не свойственным ему движением, если движущее его тело не следует за ним и не толкает его?

— Может быть это движущее тело первым толкнуло другое, а то, в свою очередь, следующее; движение прекращается, когда проталкиваемое тело уже не в состоянии заставить движущее тело толкнуть дальше и когда тяжесть движущегося имеет книзу большее стремление, чем направленная вперед толкающая сила.

Задачи из § XXXII и XXXIII интересны в том отношении, что они позволяют составить некоторое представление о том, как автор понимал современную ему динамику.

Читая § XIX, можно вспомнить известное деление Лейбница сил на живые, действующие движением, и мертвые — чисто статические.

Такое же, только еще более ясно выраженное представление имеется и в § XXXII «Иссякание бросившей силы» напоминает эллинистическое представление о движущей силе как о чем-то находящемся в самом движущемся теле. Это противоречит подлинному представлению Аристотеля, который причину движения — силу искал вне движущегося тела. Аристотелевское представление о силе, следующей за движущимся телом и находящейся с ним в непрерывном соприкосновении (так называемая теория антиперистасиса), отражено в § XXXIII, но уже в ответе «может быть» показывает, что автор не считал такое объяснение обязательным.

Эти рассуждения показывают, что «Механические проблемы» могли быть написаны только во второй период развития аристотелевской философии. Можно даже пойти немного дальше; постараемся найти близкие места в других книгах.

Классическим автором в области теории архитектуры является *Витрувий*, живший в I в. до н. э. и служивший у Юлия Цезаря и Августа. В его произведении «Десять книг по архитектуре» девятая книга отведена изложению механики; в ней рассматриваются машины разного рода: подъемные, гидравлические и военные. В третьей главе, посвященной рычагу, приводится такой пример.

Кормчий огромного грузового судна, держа валик рулевого весла, двигая его одной рукой вокруг центра и орудая им искусными нажимами, поворачивает судно, нагруженное огромной и непомер-

ной тяжестью товаров и съестных припасов. И, когда паруса <sup>натя-</sup>нуты на середине мачты, корабль не может бежать быстро; когда же реи подняты на самую вершину мачты, тогда он идет более стремительным ходом, потому что паруса набирают ветер не у пяты мачты, служащей центром, а на вершине, далеко отступая от него.

По существу, эта та же мысль, что содержится в § V и VI «Механических проблем», даже совпадает последовательность. Различие заключается в том, что у Витрувия дается правильное объяснение, у автора же «Механических проблем» — нет. Это исключает возможность заимствования Витрувием «аристотелевского» текста; оба автора пользовались каким-то общим источником.

Следы этого источника можно найти и в «Механике» Герона, во второй книге которой имеются 17 задач того же типа, что и в «Механических проблемах».

Седьмая задача у Герона формулируется приблизительно так: почему дерево можно разломать скорее, если нажать на него посредине коленом? (Ср.: «Механические проблемы», § IV.)

Восьмая задача у Герона: почему кусок дерева тем слабее, чем длиннее, и почему его изгиб увеличивается, если его закрепить в одном из его концов? Это уже цитированный выше § XVI.

Девятая задача у Герона (почему при вытаскивании зубов пользуются щипцами, а не рукой?) повторяет § XXI из «Механических проблем».

Двенадцатая задача у Герона (почему находящиеся на морском берегу камни значительной величины по большей части круглые?) аналогична § XV «Механических проблем», но ответ у Герона гораздо проще — потому что они были первоначально остроконечными, вследствие же движения моря один наталкивался на другой, так что острые их концы вследствие слабости обломились.

В «Механических проблемах» ответ гораздо запутаннее: может быть потому, что при движении быстрее перемещается более удаленное от середины. Тогда середина делается центром, а расстояния — радиусами. Но в одном и том же движении больший радиус описывает и больший круг. Быстрее движется то, что в одно и то же время проходит больше, а что на одном и том же радиусе движется быстрее, то сильнее и ударяет. Таким образом, необходимо, чтобы больше сокрушалось то, что дальше отстоит от середины. А претерпевающее это необходимо становится округлым.

Пятнадцатая задача у Герона (почему руль, несмотря на то что он очень мал, отклоняет большие корабли?) является общей и с Витрувием и с автором «Механических проблем».

Таким образом, пять задач у Герона из семнадцати являются общими с «Механическими проблемами». Рассмотрим еще несколько задач (параграфов) из «Механических проблем».

§ II. По какой причине коромысло весов поднимается после снятия груза с опущенной части, если веревка прикреплена сверху, а если коромысло подперто снизу, то не поднимается, а так и остается?

— Может быть это потому, что веревка является чем-то вроде отвеса, по одну сторону которого находится поднятая кверху большая часть коромысла.

В таком случае необходимо, чтобы большая часть опускалась вниз до тех пор, пока линия, разделяющая коромысло пополам, не совпадет с этим отвесом; таким образом, снимаемый груз был положен на меньшую часть коромысла.

Если же снизу будет находиться подставка, то произойдет противоположное, ибо при разделении коромысла отвесом на две части нижняя окажется большей половины коромысла; поэтому она не подымается, так как поднятая часть будет легче. Следовательно, по отнятии груза коромысло останется в покое; все произойдет так, как будто накладывается дополнительный груз, соответствующий избытку нижней половины коромысла над верхней.

В современной постановке эта задача сводится к определению устойчивости тела, имеющего одну неподвижную точку. В рассматриваемом случае дело сводится к тому, будет ли центр тяжести коромысла выше или ниже точки опоры. Налицо третий случай, когда центр тяжести совпадает с точкой опоры; то обстоятельство, что в «Механических проблемах» он не рассматривается, показывает, что понятие о центре тяжести было не известно. Автор считает, что при равновесии отвесная линия, проведенная через точку опоры, должна делить тело на равные части. Именно этого представления держался Посидоний Родосский (I в. до н. э.). В «Механике» Герона отмечается, что Посидоний дал физическое определение для понятия о центре тяжести или момента: центр тяжести, или момента, есть такая точка, при подвешивании к которой тяжелого тела оно разделяется на две равные части.

Архимед и его последователи в механике уточнили это понятие и установили разницу между точкой привеса и центром тяжести.

Некоторые исследователи находили у Герона в этом определении доказательство, что понятие о центре тяжести было установлено еще до Архимеда каким-то стойком Посидонием.

Теперь рассмотрим «Механику» Герона — единственный курс, который от древности дошел до нас полностью, но в арабском переводе. Он разделяется на три книги,

Первая из них начинается с описания прибора с зубчатыми колесами, при помощи которого небольшой силой можно поднять большой груз. Начало этой книги в подлиннике сохранилось в книге 8-й «Математической Библиотеки» Паппа Александрийского; там она носит специальное название «Барулк». Описывая этот прибор, Герон рассматривает зубчатые колеса, сцепленные между собой зубцами, которые движутся в двух противоположных направлениях — одни вправо, а другие влево. Когда колесо делает пол-оборота, то точки, находящиеся на его окружности, начинают двигаться в противоположных направлениях. Может, однако, случиться, что точки (обоих колес), которые должны находиться в противоположных движениях, идут в одном и том же направлении — обе вверх или обе вниз; это относится к точкам колес, находящихся вблизи места сцепления, или в противоположных этому месту сторонах колес.

В «Механических проблемах» имеется примерно то же, но только философски уточняется, что начало причинного объяснения всех подобных явлений заключается в круге. И это совершенно разумно, так как нет ничего невозможного, если что-нибудь чудесное про-

изойдет из еще более чудесного; самым же чудесным является одновременное прохождение противоположностей; круг же из них и состоит. Поэтому нет ничего странного в том, что круг является началом всех чудес.

Пользуясь тем, что круг движется одновременно противоположными движениями, некоторые устраивают так, что многие круги от одного движения движутся одновременно в противоположные стороны, как, например, медные и железные колеса, которые люди, сделавшие их, жертвуют в храмы. Если бы имелось большое число кругов, то они произвели то же самое от движения одного-единственного круга. Воспользовавшись этим присущим кругу природным свойством, мастера устраивали приборы, скрывая первичный двигатель.

Герон разбирает случаи, когда большие круги движутся быстрее или медленнее, чем меньшие. Если круги насажены на одной оси, то большие движутся быстрее, чем меньшие. Если же круги находятся на некотором расстоянии друг от друга, на одном и том же теле, но не на одной и той же оси, как у повозок со многими колесами, то меньшие круги движутся быстрее, чем большие, так как их продвижение вперед одно и то же. Так как при этом меньший круг должен сделать большее число оборотов, пока большой делает один, то по этой причине меньший круг будет находиться в более быстром движении.

Из этого можно заключить, что даже такие механики, как Герон, еще не представляли различия между угловой и линейной скоростями.

Герон разбирает парадокс, известный под именем Аристотелева колеса (рис. 17). Иногда же движение меньших и больших кругов может быть равноско-

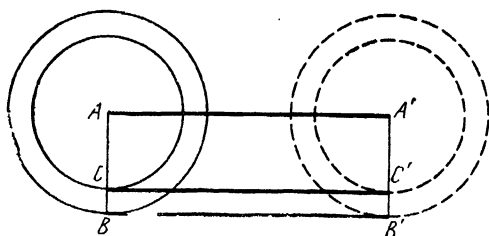


Рис. 17

рым, даже если они находятся на одном и том же центре. Вообразим два круга (рис. 17) прикрепленными к одному и тому же центру  $A$ ; пусть линия  $BB'$  будет касательной к большому кругу.

Если соединить точки  $A$  и  $B$  прямой, то  $AB$  будет перпендикулярна к  $BB'$ ; если  $BB'$  параллельна линии  $CC'$ , то последняя будет касательной к малому кругу.

Проведем через точку  $A$  параллельную им линию  $AA'$ ; если представить большой круг катящимся по  $BB'$ , то меньший круг будет катиться по  $CC'$ . Когда большой круг сделает один оборот, то и меньший тоже сделает один оборот, и положение обоих кругов совпадет с тем, которые имеют два круга с центром в  $A$ , а линия  $AB$  займет положение  $A'B'$  и  $BB'$  будет равна  $CC'$ . Но линия  $BB'$  представляет расстояние, на которое прокатится большой круг, сле-

лав один оборот, а  $CC'$  будет линией, на которой разворачивается меньший круг, делая один оборот; в таком случае движение малого круга будет равноскорым с движением большего, так как линия  $BB'$  равна  $CC'$ . Те же тела, которые в равные времена пробегают равные расстояния, имеют одинаковые скорости и одинаковые движения.

Может показаться, что это положение противоречит здравому смыслу, поскольку невозможно, чтобы окружность большого круга равнялась окружности меньшего. Нельзя утверждать, что окружность малого круга только прокатилась по линии  $CC'$ ; видно, что вместе с этим меньший круг прошел путь большего, так что оказывается, что меньший круг достигает одинаковой скорости с большим при помощи двух движений.

Действительно, если представить, что больший круг катится, а меньший сидит на точке  $C$  неподвижно, то он совершенно так же опишет линию  $CC'$  и в то же самое время; тогда и центр  $A$  опишет линию  $AA'$ , равную  $BB'$  и  $CC'$ . Таким образом, продвижение вперед не будет представлять разворачивания малого круга, ибо видно, что центр  $A$  и без качения пройдет то же самое расстояние, благодаря движению, в котором находится большой круг.

Теория построения подобных фигур начинается у Герона с решения задачи об удвоении куба (главы 9—12); он описывает построение различных приборов для вычерчивания подобных фигур — сначала на плоскости (главы 12—16), а затем и телесных (главы 17—19). Он также описывает нарезку винтовой линии и передачу между плоским зубчатым колесом и винтом с прямоугольной нарезкой; при этом отмечается, что кроме прямоугольной может быть и «чечевицеобразная» нарезка.

Рассматривая вопросы динамики, Герон опровергает мнение о том, что лежащие на Земле грузы могут быть приведены в движение только равной им силой. Он утверждает, что помещенные таким образом грузы могут быть приведены в движение силой, меньшей каждой известной силы, и объясняет причину, почему в действительности такое явление не наблюдается. Основная идея Герона заключается в том, что между силой и сопротивлением должен быть строгий закон пропорциональности, причем, если сопротивление равно нулю, то и сила равна нулю.

Если тело лежит на горизонтальной плоскости, то оно не имеет склонности двигаться в какую-либо сторону по горизонтали и потому может быть приведено в движение сколь угодно малой силой. Если же тело, имеющее вид однородного цилиндра, находится на наклонной плоскости, то через линию касания можно провести вертикальную плоскость, которая разделит цилиндр на две части, и находящаяся ниже тяжелая часть перетянет и сообщит склонность телу двигаться вниз (это представление о том, что вертикальная плоскость, проведенная через центр тяжести, делит тело на две равные части). Поэтому груз, который лежит на горизонтальной плоскости, не имеет склонности двигаться в горизонтальном направлении и по-

тому вследствие отсутствия сопротивления может быть приведен в движение сколь угодно малой силой.

Если это не происходит в действительности, то причиной является трение, но Герон не может рассматривать его как силу. Он указывает, что вода, находящаяся на слегка наклонной плоскости, начинает двигаться в сторону наклона; правда, если плоскость не будет совсем ровной, то в углублениях ее останутся маленькие лужицы; с водой это получается, так как ее частицы могут легко отделяться друг от друга; с твердым же телом этого происходить не может; поэтому находящиеся в этих неровностях части задерживают движение тела, как зубцы в зубчатых колесах.

Герон рассматривает также вертикальные перемещения грузов: для этого требуется сила, равная весу поднимаемого тела. Если это тело прикрепить к веревке, перекинутой через неподвижный блок, то для равновесия нужно к свободному концу подвесить точно такой же груз, но после этого сколь угодно малая перегрузка, добавленная ко второму грузу, приведет в движение первый груз.

Вопрос о силе тяжести и о моменте ( $\rho\sigma\lambda\eta'$ ) подводит к понятию о центре тяжести, рассмотренному в сочинениях Архимеда. Первая книга механики Герона заканчивается двумя большими извлечениями из более ранних произведений Архимеда, а именно из так называемой «Книги опор» (главы 25—31), и затем из «Книги о рычаге». Интересно представление Архимеда о рычаге, имеющем неправильную форму.

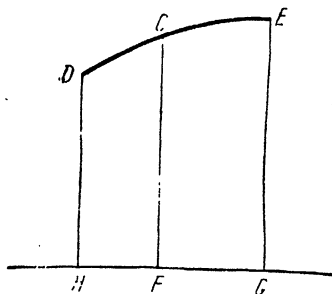


Рис. 18

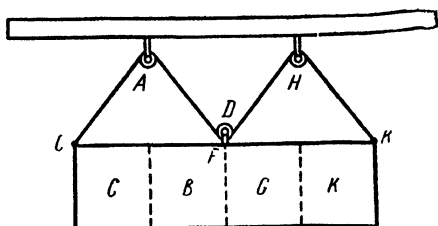


Рис. 19

Если  $C$  (рис. 18) является точкой опоры такого рычага, то для получения правильных результатов необходимо, во-первых, чтобы рычаг находился в равновесии уже до накладывания взвешиваемых грузов в точках  $D$  и  $E$  и, во-вторых, чтобы плечи рассматриваемого рычага измерялись не по расстояниям  $DC$ ,  $CE$  на самом рычаге, а по прямой  $HG$ , представляющей проекцию рычага на горизонтальную плоскость; потенциальными плечами в этом случае должны быть отрезки  $HF$  и  $FG$ .

Вторая книга «Механики» Герона посвящена теории машин, ко-

торых он насчитывает пять: ворот, рычаг, полиспасть, клин и винт. Законы действия первых трех машин ему известны достаточно хорошо, что же касается клина и винта, то он признает тесное сродство обеих этих машин, но точного определения законов их действия им не сделано. Он считает, что «чем острее угол клина, тем легче с ним работать» и что «действие клина основывается на наносимом ему ударе»; винт же «представляет только обвитый кругом клин, который, однако, нельзя ударить, но он приводится в движение при помощи рычага».

Описав машины (главы 1—6), Герон приступает к наиболее интересной части своего сочинения, а именно к установлению основного принципа работы машины. Он начинает с рассмотрения двух концентрических кругов, соединенных вместе и расположенных в вертикальной плоскости. Два одинаковых груза, подвешенных по обоим концам горизонтального диаметра большого круга, взаимно уравновешивают друг друга; если один из них переместить на ближайший к нему конец диаметра меньшего круга, то равновесие нарушится; чтобы восстановить его, надо, передвинув груз, увеличить в обратном отношении радиусы обоих кругов. Таким образом, линию, соединяющую точки приложения обоих грузов, можно рассматривать как коромысло весов, могущих двигаться около неподвижного центра общих кругов.

Таким образом, получается, что колоссальную величину можно привести в движение небольшой силой. Действительно, если около одного и того же центра имеется два круга, причем больший груз находится на какой-либо дуге малого круга, а меньший — на дуге большого круга и отношение радиуса большого круга к радиусу меньшего больше, чем отношение большого груза к малой силе, которая его движет, то малая сила перевешивает большой груз.

Герон доказывает, что при употреблении машин подъем грузов происходит медленнее, ибо «что выигрывается в силе, то теряется во времени». Он разбирает этот принцип для каждого типа машин. Для объяснения выигрыша в силе для подвижного блока, а также полиспаста указывается, что вес поднимаемого груза распределяется на несколько веревок (для подвижного блока на две), причем приводится чертеж, который встречается также и у Леонардо да Винчи (рис. 19). Поднимаемый груз  $F$  делится на четыре части:  $C$ ,  $B$ ,  $G$ ,  $K$ , каждая из которых приходится соответственно на веревки  $CA$ ,  $AD$ ,  $DH$ ,  $HK$ . Если веревку  $HK$  отделить от места  $K$  прикрепления к грузу  $F$ , то тянушему за нее человеку нужно приложить силу, равную натяжению данной веревки, т. е. силу, в четыре раза меньшую веса груза  $F$ . Вследствие наклонности веревок натяжение будет больше четверти веса, но Герон, может быть, считал, что все веревки являются вертикальными, и наклонность получилась лишь для большей ясности чертежа.

Особенно интересно приводимое Героном объяснение для клина, истинная теория действия которого оставалась неизвестной античным механикам. В главе 15 он писал (рис. 20), что всякий удар, даже самый легкий, приводит в движение любой клин. Пусть угол

клина  $A$ , а основание — линия  $DM$ . Пусть его приводит в движение удар  $BC$ , перемещающий клин на расстояние  $AD$  от первоначального положения. Возьмем от удара  $BC$  некоторую часть — удар  $BE$ , являющийся наименьшим из известных ударов. Взятый отдельно удар  $BE$  приводит в движение некоторую часть клина.

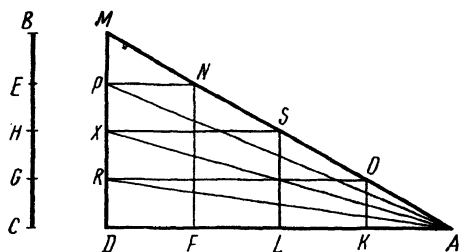


Рис. 20

Если удар  $BC$  вызывает перемещение на расстояние  $AD$ , то  $EC$  передвинет клин на расстояние, меньшее  $AD$ , положим  $AF$ . Добавим затем удар  $BE$ ; если перемещение  $AD$  производится ударом  $BC$ , то взятый отдельно удар  $BE$  даст перемещение  $DF$ . Разделим удар  $BC$  на части, равные  $BE$ , а именно:  $BE$ ,  $EH$ ,  $HG$ ,  $GC$ ; тогда и расстояние  $AD$  разделится на части, равные  $DF$ , а именно:  $AK$ ,  $KL$ ,  $LF$ ,  $FD$ ; таким образом, каждый из ударов  $BE$ ,  $EH$ ,  $HG$ ,  $GC$  произведет соответственно перемещения  $DF$ ,  $FL$ ,  $LK$ ,  $KA$ . Теперь проведем прямые  $FN$ ,  $LS$ ,  $KO$ , параллельные  $DM$ , а также  $PN$ ,  $XS$ ,  $RO$ , параллельные  $AD$ ; тогда получатся равные между собой линии  $DR$ ,  $RX$ ,  $XP$ ,  $PM$ . Если полученные точки  $P$ ,  $X$ ,  $R$  соединить с точкой  $A$ , то получим четыре клина с вершинами в  $A$  и основаниями  $MP$ ,  $PX$ ,  $XR$ ,  $RD$ ; каждый из них ударом, равным  $BE$ , передвигается на расстояние, равное  $AD$ .

Таким образом, если удар  $BE$  передвигает весь клин на расстояние  $DF = KA$ , то этот же удар передвинет клин с основанием  $RD$  на расстояние  $AD$ . Отсюда следует, что отношение ударов  $BE$  и  $BC$  соответствует отношению клиньев  $DR$  и  $DM$ . То же будет и со временем движения клина с основанием  $DR$ , и с расстоянием, которое проходит весь клин от удара  $BC$ ; все эти отношения будут такими же, как и отношение удара  $BE$  ко всему удару  $BC$ . Если вбиваемый клин будет одним из малых клиньев и вбивается сильным ударом, то он продвинется на столько же, на сколько продвинется весь клин от совокупности всех ударов, т. е. от целого сильного удара. Так как отношения времен к временам, ударов к ударам и основания всего клина к основанию каждого малого клина одинаковы, то получается, что чем меньше угол клина, тем меньше и сила по отношению к той силе, которая вбивает целый клин.

Основной закон работы машины Герон формулирует так (глава 22): если при пользовании машиной требуется увеличение силы, то в результате происходит замедление, ибо чем менее движущая сила по отношению к движимой тяжести, тем больше потребуются и времени; таким образом, сила к силе и время ко времени находятся в том же самом обратном отношении. Это и есть знаменитое золотое правило античной механики: *что выигрывается в силе, то теряется во времени*.

яется в скорости. Герон проверяет это правило для трех первых видов машин. Относительно клина и винта он не может выставить того же утверждения, ибо чем большая сила действует на них, тем меньшим становится каждый из них. Что замедление имеет место и для них обоих, ясно, поскольку многие удары требуют больше времени, чем один единственный, и частое поворачивание винта берет больше времени, чем один оборот.

Таким образом, доказано, что отношение клинового угла к углу будет обратным отношением движущего удара к удару. В таком случае и отношение времен является обратным отношением сил (главы 27 и 28).

Для характеристики научного кредо Герона большой интерес представляет глава 33 второй книги его «Механики». Он пишет в ней, что занимающимся механической наукой совершенно необходимо знать причины, действующие в каждом употребляемом движении, как это и сделано при помощи физических доказательств для каждого вида разобранных машин, чтобы относительно их не было ничего недоказанного или вызывающего сомнение, но чтобы при разборе каждой задачи можно было обнаружить правильность каждого рассуждения.

Тот, кто хочет основательно узнать все причины, необходимо должен применять естественные принципы, один или многие, и связывать с ними все, что он исследует; решение каждого отдельного вопроса дается в основе только тогда, когда отыскана причина, а последней может быть лишь то, что уже известно.

Вторая книга «Механики» заканчивается разбором задач древних и практическими задачами на определение центра тяжести, уже разбиравшимися в главе, посвященной Архимеду (главы 35—41).

Третья книга «Механики» Герона трактует о машинах, употреблявшихся в практике того времени, а именно — о машинах для поднятия тяжестей, а также о прессах различного вида. Представляющая большой интерес для истории древней техники, она мало что дает по отношению к теоретической механике.

Примерно то же самое можно сказать о посвященной механике десятой книге «Архитектуры» Витрувия, в которой описывается состояние прикладной механики в эпоху около начала нашей эры.

Приведем определение машины у Витрувия. *Машина есть сочетание соединенных вместе деревянных частей, обладающее огромными силами для передвижения тяжестей.*

Уже само определение показывает, что наиболее распространенным типом были грузоподъемные машины. Кроме них, Витрувий упоминает об «акробатических (верхолазных) машинах», демонстрирующих «не искусство, а смелость», и о пневматических, которым у Филона и Герона были посвящены особые книги. Кроме грузоподъемных Витрувий описывает также и водоподъемные машины (книга X, главы 4—7).

Конец книги X Витрувий посвящает описанию военной техники. В рассказе Витрувия есть одно обстоятельство, интересное и для теоретической механики. В главе 16 рассказывается история о не-

котором архитекторе Каллии, который приехал в Родос, прочел лекцию и показал модель стены с установленным на ней вращающимся краном, которым он захватил приближавшийся к укреплению гелепол (буквально «берущая город» машина) и перетащил его на другую сторону стены. Родосцы пришли в восторг, отняли жалование у старого военного архитектора и передали его Каллию.

Когда через некоторое время царь Деметрий Полиоркет осадил Родос и придвинул к его стенам гелепол, весивший 360 тыс. фунтов, то родосцы потребовали от Каллия, чтобы он приготовил машину для переноски этого гелепола внутрь стен, но это было невозможно. Ибо не все возможно произвести одним и тем же способом, но одни вещи, сделанные по образцу небольшой модели, действуют одинаково и в большом размере, а для других не может быть модели, но их строят сами по себе; некоторые же таковы, что на модели они кажутся правдоподобными, но, будучи увеличены, разваливаются. Буравом можно буравить отверстие в полдюйма, в дюйм и в полтора; если же таким способом сделать отверстие в пять дюймов, это не было бы осуществимо, а об отверстии в полфута или больше не приходится даже и думать.

Здесь впервые отмечается, что между механическим и геометрическим подобиями имеется большая разница.

Таким образом, рассмотренные выше три произведения, довольно близкие по духу, характеризуют механику в том виде, в каком она сложилась в эпоху эллинизма. Деятельность Витрувия относится примерно к концу I в. до н. э. и началу I в. н. э.

Позднейшие исследования показали, что время деятельности Герона можно отнести примерно к 100 г. н. э. Время деятельности автора «Механических проблем» все еще не может быть определено с полной достоверностью, но материал, используемый этим автором и Героном, имеет очень много общего. Правда, оба писателя отличаются по духу: чувствуется, что Герон является хорошо образованным специалистом, не признающим никаких чудес.

Что касается автора «Механических проблем», то он гораздо более философ, чем специалист; слово «может быть» в его произведениях встречается даже в тех случаях, когда правильный ответ у Герона дается вполне определенно. Принадлежность его к школе Аристотеля не вызывает никаких сомнений; можно только поставить вопрос: не было ли у Аристотеля или в его школе сочинения, которое могло быть источником как для Герона, так и для автора «Механических проблем»? Возможность существования такого источника нельзя отрицать, но все-таки Герон, цитируя Архимеда и Посидония, не ссылается на Аристотеля. Он только отмечает «задачи древних», которые совпадают с некоторым количеством задач в «Механических проблемах»; две из этих задач встречаются и у Витрувия.

Правда, в «Механических проблемах» есть два эксцерпта, которые появились до Архимеда: это параллелограмм скоростей, использованный Архимедом в книге «О спиралях», и очень интересный эксцерпт о происхождении криволинейного движения в резуль-

тате сложения прямолинейных перемещений, «не находящихся между собой ни в каком отношении». Эта теория вполне может принадлежать если не Евдоксу, то во всяком случае его школе.

Поэтому можно предполагать, что «Механические проблемы» содержат некоторый материал, относящийся ко времени жизни Аристотеля, но этого все же недостаточно, чтобы приписать их авторство какому-либо исследователю IV в. до н. э. Отнесение времени жизни автора «Механических проблем» к I и II вв. н. э., т. е. к эпохе деятельности Герона, в свете всего вышеизложенного является гораздо более вероятным.

## Часть II

# СОЗДАНИЕ КЛАССИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

---

### МЕХАНИКА СРЕДНЕВЕКОВЬЯ. НАЧАЛО СТАТИКИ. ИОРДАН НЕМОРАРИЙ И СТЕВИН

Крушение Римской империи в IV—V вв. н. э. было одновременно концом рабовладельческой формации в Средиземноморье, где рабовладение носило наиболее яркий характер.

У греков рабство имело промышленный, городской характер; рабы использовались как рабочая сила в мастерских. В Риме положение было несколько иным: после завоевательных войн III—II вв. до н. э. римляне получили громадное количество рабов, которых они использовали в качестве рабочей силы в сельском хозяйстве, в латифундиях богатых патрициев.

Классической страной латифундий был Карфаген, где были даже написаны специальные сочинения по ведению плантационного хозяйства (Магон), которые были переведены на латинский язык.

В Риме развитие латифундий началось в начале II в. до н. э. после окончания второй Пунической войны. Период завоевательных войн продолжался и дальше, вплоть до эпохи Траяна (конец I в. н. э.), завоевавшего Дакию и Месопотамию; от последнего завоевания его преемник Адриан отказался, и завоевательные войны окончились.

Но если не было прилива свежей рабочей силы из военнопленных, то надо было в какой-то степени беречь уже имеющуюся. Во II в. н. э. появляются законы, запрещающие хозяину убивать своих рабов, и в сельском хозяйстве рабы переходят мало-помалу, без какой бы то ни было «революции» в положение крепостных: начинается феодальная эпоха. В течение V в. н. э. на развалинах Западной Римской империи возникли «варварские» государства, и вожди германских дружин заняли места римских патрициев в их латифундиях. Правда, центр культурной жизни Средиземноморья в течение второй половины I тысячелетия н. э. лежал совсем не в пределах Западной Европы, а восточнее — в Византийской империи и Передней Азии.

В пределах Византийской империи сохранилась городская жизнь и оживленная торговая деятельность; равным образом и в области культуры жизнь шла гораздо более интенсивно, чем на западе.

II в. н. э. часто называют «греческим возрождением». Это было своего рода возрождение, но только на греческом языке писали главным образом не греки; так, наиболее выдающимся писателем II в. был сириец *Лукиан Самосатский*. Начиная со II в. н. э. развивается сирийская сводчатая архитектура, хорошо известная по византийским образцам (собор «Святая София»); сирийский архитектор эпохи Траяна Аполлодор перестраивает римский Пантеон, имевший первоначальную форму, обычную для всех грекоримских храмов; теперь верхняя часть храма приобретает форму купола.

В области математики выделяются Никомах Геразский и Феодосий Триполийский; даже в такой, казалось бы, специфически римской деятельности сирийцы имеют юридическую школу в Берите (современный Бейрут), давшую ряд замечательных юристов (Ульпиан).

Громадное значение сирийцев заключается в том, что они были передатчиками античной науки арабам. Вершиной их деятельности является VII и VIII вв. н. э. (первая половина), когда столица Арабского халифата при Омайядах находилась в столице Сирии Дамаске. Около 750 г. столица халифата перешла в Багдад, и сирийское влияние в арабской науке сменилось иранским.

Страны Передней Азии не знали сильно развитого рабовладения античного типа; поэтому на их почве феодализм принял ярко выраженную форму и был гораздо сильнее, чем в Западной Европе. Отличительный внешний признак феодализма (гербы) был заимствован в эпоху крестовых походов с востока; на это указывают названия цветов в геральдике: *azig* — синий, *gueules* (персидск. *ghul*) — розовый.

В эпоху средневековья, начиная от крестовых походов и до турецкого завоевания, Запад оставался побежденным в столкновении с Востоком: даже в XVI в. самыми сильными государствами были империи османов в Европе и великих моголов в Индии; если с XVI в. начался перелом, то это произошло в значительной степени благодаря тому, что мировые торговые пути из Средиземноморья перешли после открытия Америки на берега Атлантического океана.

Очень распространено мнение, что эпоха средневековья представляет темное время. Это мнение в известной степени справедливо для Западной Европы, да и то лишь в эпоху раннего средневековья — примерно до XII в. н. э. Для Востока наблюдается обратное положение — это время блестящего расцвета Арабо-Иранского халифата на западе Азии и Танской империи на ее востоке.

В чем заключалось основное отличие между рабовладельческой и феодальной формациями? В классических странах рабовладения — грекоримском мире — наиболее характерной являлась городская жизнь, жизнь «полисов» — греческих, итальянских или эллинистических.

В конце античной эпохи городская жизнь в значительной степени замерла, города сохранили роль главным образом торговых центров; в хозяйственной области на первом месте выделились крупные земельные владения; «государство-город» сменился «госу-

дарством-поместьем», рабы сменились крепостными колонами, вместо городской промышленности на первое место выступило сельское хозяйство; основную роль начинала играть деревня; вместо охватывающего большие области городского товарооборота появилось замкнутое в значительной степени самодовлеющее домашнее хозяйство.

В этом отношении очень интересно сравнить развитие наук физико-математического и биологического циклов. В то время как между греческой геометрией, средневековой алгеброй и анализом XVIII в. замечаются большие различия, «*Historia Naturalis*» Плиния и «Естественная история» Бюффона имеют приблизительно одинаковый характер; «Афоризмы» греческого врача Гиппократы перепечатывались еще в первой половине XIX в. Если физико-математические науки в значительной степени росли из самих себя, то успехи биологических наук получались в результате вторжения постороннего начала: изобретение микроскопа, успехи химии, появление лучей Рентгена и т. д. Так как в области развития науки стимулирующим фактором являлся город, а не деревня, то ясно, почему в эпоху феодализма так медленно развивались точные науки.

Какие слои населения обслуживала средневековая наука? Ими, конечно, не были широкие массы средневекового крестьянства, заданного тяжелой сельскохозяйственной работой и не имевшего ни сил, ни времени, ни возможностей для повышения своего культурного уровня. Это могли позволить себе только высшие слои землевладельческого общества, имевшие и досуг, и материальные средства для удовлетворения своих культурных потребностей. Им нужны были поэты для восхваления их успехов и услаждения досуга, историки для оправдания преступлений и медики для исцеления. И средневековье дало великих поэтов, трудолюбивых историков, замечательных медиков.

Потребность знания будущего в то время, когда громадное большинство мусульманских династий существовало не более пятидесяти лет, удовлетворяла вещая наука — астрология. Построенная на основании птолемеевского «Альмагеста», она требовала больших математических вычислений; под ее сенью переднеазиатские математики, бывшие одновременно и астрономами, занимались в часы досуга и чистой математикой, которая — единственная из всех наук средневековья — добилась в своем развитии больших успехов.

Во времена от Гиппарха до Коперника, а пожалуй, и еще дальше — вплоть до конца XVIII в. — астрономия была ведущей наукой в области физико-математических знаний. Она сыграла большую роль и в развитии кинематики вращательных движений, и в развитии классической динамики.

Теперь рассмотрим, каково было положение «чистой» механики или ее частей, не зависящих от астрономических теорий.

В этом отношении как арабская, так и западноевропейская механика опиралась на учение Архимеда — особенно на книги «О равновесии плоских фигур» и «О плавающих телах». В книге «О равно-

веси плоских фигур» Архимед дал математическое доказательство закона рычага, коромысло которого предполагалось невесомым.

Практика поставила вопрос о равновесии сил на неравноплечем рычаге, который уже не считался невесомым; решение этой задачи требовалось для определения веса особо тяжелых тел (десятичные весы и так называемый безмен). Этой задачей, решение которой в настоящее время доступно каждому студенту, занимались в то время ученые трех цивилизаций: римской, переднеазиатской и китайской.

Первое ее решение принадлежит астроному Клавдию Птолемею, который дал теорию определения веса тел на неравноплечих весах, описав прибор, который он назвал *χαρίστιον* (безмен). Книга Птолемея известна из переработки арабского астронома и математика Сабита ибн Курры (*Thabit ibn Qurra*), жившего в IX в. н. э. Его сочинение, получившее в латинском переводе название «*Liber Chastonis*», давало решение этой задачи при помощи того же метода, который применял и Архимед.

Известны сочинения на ту же тему в китайской математике, тоже относящиеся примерно ко второй половине I тысячелетия н. э., написанные, очевидно, вполне самостоятельно без какого бы то ни было влияния со стороны Архимеда, которое так ясно у Сабита ибн Курры, бывшего первым знатоком Архимеда среди представителей мусульманской науки.

Из второго произведения Архимеда «О плавающих телах» практики того времени взяли только формулировку закона Архимеда, необходимую для построения прибора типа современных гидростатических весов для определения удельного веса твердых и жидких тел. Впервые такой прибор построил Синезий, епископ Кирены, ученик знаменитой Ипатии, погибшей от рук разъяренных монахов (около 400 г. н. э.). Этот прибор ювелиры того времени использовали для той же цели, что и Архимед в эпизоде с золотым венцом царя Гиерона.

У арабов описанию такого прибора и его теории была посвящена книга «Весы мудрости», написанная ал-Казини примерно около 1120 г. н. э. Сочинения на ту же тему имеются и в западноевропейских средневековых рукописях.

Вышеприведенное показывает, что в странах, примыкающих к запада и востока к Средиземному морю, механика не развивалась в течение всего первого тысячелетия нашей эры и даже несколько позже. Чтобы двинуть ее развитие вперед, необходим был толчок. Этот толчок был дан не там, где культура феодальной эпохи стояла на наивысшем уровне, а, наоборот, там, где феодальный строй был наиболее слаб, а именно в средневековой Европе, или, точнее, во Франции в XIII в. н. э.

В эпоху крестовых походов во Франции и Италии, а также и в Южной Германии происходила так называемая «революция Коммун» — освобождение городов из-под власти сеньоров. Это было первое выступление буржуазии, выступление, не бывшее очень побе-

доносным и закончившееся на исходе средневековья образованием абсолютных монархий.

Но если буржуазия и не добилась власти во всем государстве, то все же она сумела освободиться от власти феодальных сеньоров. Город, получивший свободу путем выкупа или путем восстания, в ознаменование своей свободы строил помещения для выбранного его жителями правительства (ратуша), сначала небольшие, а затем уже здания значительно больших размеров, в которых могла бы собираться основная часть населения города, — это был собор.

Назначение средневекового собора довольно сильно отличалось от современной церкви, находящейся во власти духовенства; в средневековом соборе духовенству принадлежала лишь более возвышенная часть — хоры, а все остальное предоставлялось в распоряжение народа, который проводил здесь свои собрания, слушал театральные представления духовно-нравственного характера — мистерии и миракли, а в плохую погоду иногда устраивал даже ярмарки. Для помещения большого количества народа требовалось и большое здание.

Таким образом, во Франции, точнее, на ее севере, возникла архитектура, получившая название готической. Словом «готический» назван немецкий шрифт; поэтому довольно часто готическую архитектуру связывают с Германией. В действительности даже готический шрифт был создан во Франции; он был излюбленным шрифтом придворных писцов Людовика IX.

Задача получения большого и достаточно светлого здания решалась средневековыми архитекторами примерно в таких же формах, как и современные заводские помещения со стрельчатыми фермами, но то, что теперь делается в железе и бетоне, они должны были делать в камне. Для возможности возведения такого здания нужно было знать взаимные давления между отдельными деталями постройки и не утяжелять чрезмерно здания, как это было в предшествующей романской и сирийско-византийской архитектуре. Обойтись без сводов было нельзя, но, как известно, решение задачи на равновесие трехшарнирной арки показывает, что чем больше высота замка, соединяющего обе половины арки, тем меньше будут боковые давления в опорных шарнирах арки.

Этим объясняется то, что вместо полукруглых сводов сирийской архитектуры французские зодчие строили высокие стрельчатые своды исходя из правила *archispiguti non dant impulsam contrafortibus* — стрельчатые арки не дают напора контрфорсам. Так назывались боковые опорные фермы, поддерживающие крышу средней более высокой части здания и делавшие, по выражению Виктора Гюго, готический собор похожим на животное, скелет которого находится не внутри, а вне его. В действительности боковой напор существовал (в противном случае контрфорсы были бы излишни), но он был значительно меньше, чем у полукруглых сводов.

В это время в школе парижского математика *Иордана Немора-рия* (вторая половина XIII в.) была решена задача, с которой не

смогли справиться античные механики, — задача о равновесии на наклонной плоскости.

Хотя наклонная плоскость применялась древними египтянами для передвижения грузов при постройке высоких зданий и, согласно Герону Александрийскому, была одной из пяти основных машин древности наравне с клином и винтом, законы действия ее оставались тайной для древних математиков.

Основной причиной являлось то, что законы трения и даже представление о трении как о некоторой силе не были известны древним. Их «силы» были только движущими; кроме того, определение закона движения при наличии трения даже на горизонтальной плоскости не могло быть получено при помощи закона простой пропорциональности — чтобы привести тело в движение, нужно было приложить предварительно некоторую силу, иными словами, при скорости, равной нулю в момент начала движения, сила могла не равняться нулю. Тем не менее решение этой задачи не давало покоя греческим математикам.

Вот как решал ее Герон Александрийский. Предположим, что надо передвинуть груз по наклонной плоскости. Пусть поверхность этой плоскости, а также прикасающаяся к ней сторона груза гладкие. В этом положении необходимо приложить с другой стороны силу или подвесить груз и, кроме того, иметь некоторый излишек силы над грузом, чтобы поднять его вверх.

Для доказательства правильности предложения разберем случай, когда грузом является некоторый цилиндр (рис. 21). Так как площадь соприкосновения цилиндра с наклонной плоскостью невелика, то цилиндр естественно скатится вниз. Вообразим плоскость, которая проходит через линию соприкосновения цилиндра с наклонной плоскостью и будет перпендикулярна к ней. Очевидно, что эта плоскость пройдет через ось цилиндра и рассечет его на две равные части.

Через линию соприкосновения цилиндра с наклонной плоскостью проводим еще вертикальную плоскость. Она делит цилиндр на две неравные части, меньшая из которых ( $BOD$ ) находится в верхней области, а большая ( $BCEO$ ) — в нижней. Большая часть перевесит меньшую и таким образом цилиндр покатится.

Если с другой стороны вертикальной плоскости отнять избыток ( $OBAC$ ), на который большая часть превышает меньшую, то обе разделенные части  $ODB$  и  $OCE$  — окажутся в равновесии и общий их вес будет неподвижным на линии соприкосновения цилиндра с наклонной плоскостью; таким образом, этот вес не потянет цилиндр ни вверх, ни вниз. Поэтому для достижения равновесия требуется

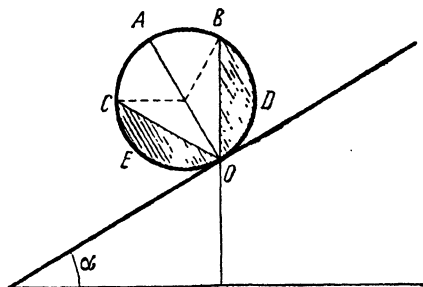


Рис. 21

сила, равная разности весов отсеченных частей (т. е. части *ОСАВО*), и если теперь к этой силе прибавить маленький добавок, то она пересилит груз.

Правильное решение задачи о равновесии на наклонной плоскости было дано во второй половине XIII в. французским ученым Иорданом Неморарием, создателем новой науки — науки о весе (*Scientia de ponderibus*). Основная идея Иордана заключалась в установлении различия между весом (*pondus* — тот же корень, что и в слове «пуд») тела и его тяжестью (*gravitas*).

Вес тела, аналогично современному понятию о массе, имеет постоянную величину; что же касается тяжести — давления или вообще действия на другие тела, то она может изменяться в зависимости от положения (*gravitas secundum situs*). Так, на длинном плече рычага один и тот же вес оказывает большее давление (имеет большую тяжесть), чем на коротком. Чтобы поднять вверх свободно висящий груз, нужно приложить силу, равную его весу, но для поднятия груза по наклонной плоскости нужно приложить силу, которая должна преодолеть не всю его тяжесть, а только его «тяжесть по положению», а она тем меньше, чем меньше угол наклонной плоскости или вообще линии перемещения тела по отношению к горизонту.

Иордан Неморарий понял, что известный в древности закон равновесия на рычаге и неизвестный закон равновесия на наклонной плоскости являются частными случаями какого-то общего закона. Еще во времена Аристотеля считали, что большая тяжесть груза на длинном плече объясняется тем, что при вращении рычага точка приложения веса описывает большую дугу, чем на коротком плече. Так как при равновесии двух тел, находящихся на обоих плечах рычага, их веса должны быть обратно пропорциональны длинам плеч рычага, то «тяжесть по положению» можно считать пропорциональной произведению веса на плечо (радиус описываемого круга) или на величину соответствующего изменения высоты груза. При движении по наклонной плоскости тяжесть по положению зависит от величины наклона.

Основные положения Иордана формулировались так: груз тяжелее, если в заданном положении линия его спуска менее наклонна. Более наклонной линией перемещения является такая, у которой для заданного положения перемещение по высоте меньше.

Несомненно принадлежащими Иордану являются два сочинения: «*Elementa Iordani de ponderibus*» (более короткая ранняя работа) и «*Liber de ratione ponderis*» (более поздняя, напечатанная в 1565 г.). Сравнивая изложение в двух этих произведениях, можно составить представление о ходе мыслей Иордана.

Известно, что два одинаковых груза на концах равноплечего прямолинейного рычага находятся в равновесии, которое, кроме того, является безразличным (рис. 22). В «Элементах» Иордан утверждал, что это равновесие, кроме того, является устойчивым. Доказывал он это так.

Если плечи рычага расположены по горизонтали, то имеется равновесие. Выведем рычаг из положения равновесия, повернув его

в вертикальной плоскости на некоторый угол. Оба груза, и верхний и нижний, стремятся двигаться вниз. Можно считать, что они опускаются по наклонным плоскостям, которые получатся, если соединить хордами начальное и близкое к нему конечное положения обоих грузов, предполагая, что они двигаются вниз, описывая дуги одинаковой величины. Нетрудно видеть, что у нижнего груза наклонная плоскость более пологая, чем у верхнего, перемещение которого более близко к вертикальному. Тогда, согласно определению, верхний груз будет иметь большую тяжесть по положению, следовательно, рычаг вернется в горизонтальное положение равновесия.

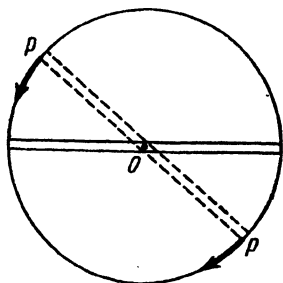


Рис. 22

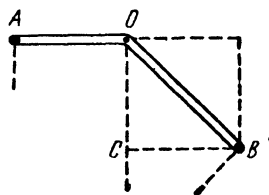


Рис. 23

В той же книге «Элементов» Иордан рассматривает ломаный рычаг  $AOB$  (рис. 23), плечо  $OA$  которого расположено горизонтально, а плечо  $OB$  лежит в вертикальной плоскости, направлено вниз и занимает такое положение, что его конец  $B$  находится на расстоянии  $BC = OA$  от вертикали, проведенной через центр  $O$ .

Если в точках  $A$  и  $B$  помещены одинаковые грузы, то система находится в равновесии, когда плечо  $OA$  направлено по горизонтали. Но так как груз  $A$ , выходя из заданного положения, опускается по вертикали, а груз  $B$  — по наклонной плоскости, перпендикулярной к  $OB$ , то «тяжесть по положению» груза  $A$  больше, чем у груза  $B$ , и следовательно, равновесие нарушается.

В книге «Liber de ratione ponderis», представляющей дальнейшую стадию развития «Науки о весах», этих предложений нет. Иордан отбросил их, как ошибочные, и дал новое определение «тяжести по положению». Первоначально он считал, что она зависит только от угла наклона перемещения (в случае наклонной плоскости — от того угла, который она образует с горизонтом); теперь он понял, что при сравнении перемещений обоих грузов существенное значение имеют вертикальные составляющие обоих перемещений.

Обычно считают, что «тяжесть по положению» груза  $P$  на наклонной плоскости равна составляющей веса по наклонной плоскости  $P \sin \alpha$ , где  $\alpha$  — угол плоскости с горизонтом. Это равносильно тому, что из Архимедова условия — равновесие грузов на рычаге

$Pa = Qb$  — делается вывод, что Архимед полагал  $Q \sin \beta$ , т. е. момент,



Предположим теперь, что одна из плоскостей стоит более круто. Теперь, хотя и веса и перемещения  $s$  для обоих грузов остаются одинаковыми, но груз, находящийся на более крутой плоскости, перетянет, потому что у него  $MH$  — вертикальное перемещение (проекция  $s$  на вертикаль больше, чем  $NZ = ER = h$ ); для равновесия нужно соответственно увеличить груз, находящийся на другой плоскости, так, чтобы произведения грузов на вертикальное перемещение были одинаковы для обоих грузов.

Если  $BD$  — высота точки  $D$  над горизонтом, то тяжести по положению обоих грузов равны

$$e \cdot s \cdot \frac{BD}{DC}; \quad b \cdot s \cdot \frac{BD}{DA}.$$

Сравнивая их, получаем условия равновесия в виде

$$e : DC = b : DA.$$

Эти условия подобны условиям равновесия грузов на рычаге, если вместо длины наклонных плоскостей поставить величины соответствующих плеч и обратную пропорциональность заменить прямой.

Теперь можно установить, какое отношение имеют изложенные предложения к определению давлений тяжелых тел на опоры.

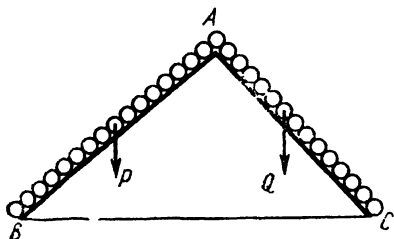


Рис. 25

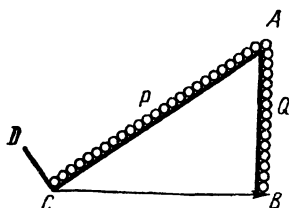


Рис. 26

Иордан утверждает, что не обязательно, чтобы уравнивающиеся на наклонных плоскостях грузы представляли материальные тела (рис. 25, а); эти грузы можно равномерно распределить по обеим сторонам треугольника, изображающего соответствующие плоскости. Тогда получатся две однородные линии, или цепочки, веса  $P$  и  $Q$  которых относятся как длины  $AB$  и  $AC$  соответствующих плоскостей; если это условие соблюдено, то веса  $P$  и  $Q$  находятся в равновесии.

Пусть теперь требуется определить давление груза  $P$ , имеющего произвольную форму, лежащего на наклонной плоскости  $AC$  и удерживаемого в покое загородкой  $CD$ , перпендикулярной к  $AC$  (рис. 26). Для этого достаточно распределить груз  $P$  по плоскости  $AC$  и затем продолжить полученную ленту по вертикали  $AB$ . Если

вес полученной части равен  $Q$ , то давление груза  $P$  на  $CD$  равно давлению ленты  $AB$  на горизонтальную площадь, помещенную в точке  $B$ , т. е. весу  $Q$ .

Возьмем лежащую на наклонных плоскостях цепь  $BAC$  и соединим ее концы  $B$  и  $C$  свободно висящей однородной цепочкой из такого же материала, что и  $BAC$ ; тогда получим чертеж, при помощи которого нидерландский механик *Стевин* доказывал условие равновесия тяжелых тел на наклонной плоскости. Его доказательство основано на предположении о невозможности вечного движения, которое получилось бы, если лежащая на  $ABC$  цепочка не находилась в равновесии. Но, если она находится в равновесии, то можно откинуть свободно висящую часть, которую следует рассматривать как симметричную однородную цепь, подвешенную на концах  $B$  и  $C$  и, очевидно, находящуюся в равновесии.

Таким образом, работа Иордана Неморария не осталась бесплодной; ее непосредственным продолжателем был *Симон Стевин* (1548—1626). Он родился в Брюгге (в теперешней Бельгии); первоначально он работал бухгалтером; следом таких занятий (кроме учебника бухгалтерии) осталась его знаменитая книга «*Disme*» («Десятка»). В ней он предложил десятичную систему мер и в соответствии с этим десятичные дроби, которые после него вошли во всеобщее употребление. Время его жизни совпадало с эпохой борьбы Нидерланд против испанского владычества; из Брюгге ему пришлось бежать; после нескольких лет скитаний он попал в Голландию, где прошла большая часть его жизни на службе у принца Морица Нассауского — младшего брата Вильгельма Оранского, вождя нидерландского народа в борьбе за освобождение. Мориц осуществлял техническую подготовку военных действий, обучение регулярной армии (между прочим, это была первая регулярная армия в Западной Европе), постройку судов и военных укреплений, в этой области ему много помогал Стевин.

Стевина обычно считают родоначальником аксиомы параллелограмма сил в форме силового треугольника, который так и называется треугольником Стевина.

Так как Стевин был продолжателем Иордана, установим, знал ли он о его работах. Нужно отметить, что работа «*De Ratione Ponderis*» Иордана Неморария была напечатана в 1565 г., поэтому Стевин мог ее знать. Заглавие основного произведения Стевина «*Beghinselen der Weegkonst*» («Начала науки о весах») представляет собой перевод «*Scientia de Ponderibus*» Неморария. Стевин, как большой патриот голландского языка, переводил на него все научные термины: так, математика называлась у него *Wiskunde*, геометрия — *Meetkunde* (наука об измерении); *Weegkonst* — буквально «Искусство взвешивания» — он считал особой наукой, стоящей наряду с геометрией. Он говорил, что геометрия изучает форму и величину фигур и тел, не обращая внимания на их вес, а наука о весах имеет дело с весами тел и не обращает внимания на их величину и форму. Именно Стевин ввел в механику термин «равновесие» вместо греческой «равномоментности».

«Начала науки о весах», которое теперь можно назвать статикой, состоит из двух книг. Вторая из них посвящена определению центров тяжести и стоит в одном ряду с работами его современников Галилея, Коммандина, Гульдена и других последователей Архимеда. Первая книга состоит из двух частей: в одной из них описаны прямые (вертикальные) веса и рассмотрено равновесие параллельных сил на рычаге; в другой части рассмотрены косые веса, т. е. наклонные силы. Это вполне соответствует изложению Иордана, у которого рычаги и наклонные плоскости рассматриваются совместно. Нужно отметить, что в этой книге речь идет только о равновесии двух сил и никакого силового треугольника нет; но все же Стевин устанавливает, что линии действия трех уравнивающих сил должны пересекаться в одной точке.

Во втором издании книги «*Beghinselen der Weegkonst*» Стевин сделал несколько добавлений. Из них особенно интересны два: «Спартостатика», в котором рассматриваются условия равновесия груза, подвешенного на веревках, и «Трохлеостатика», где определяются величины сил, действующих в полиспахах.

«Спартостатика» представляет собой собрание замечаний к первой книге «*Beghinselen*», сделанных без формулировок и доказательств. В одном из них рассматривается груз  $P$ , прикрепленный узлом в точке  $C$  к двум веревкам  $CD$  и  $CE$  (рис. 27). Стевин проводит вертикаль  $CF$  и из произвольной точки  $H$  левой веревки прямую  $HI$ , параллельную направлению второй веревки  $CE$ . Он утверждает следующее: как  $CI$  относится к  $IH$ , так и вес  $P$  относится к весу, приходящемуся на веревку  $CE$ . Как  $CH$  относится к  $IH$ , так и вес, приходящийся на веревку  $CD$ , относится к весу, приходящемуся на веревку  $CE$ .

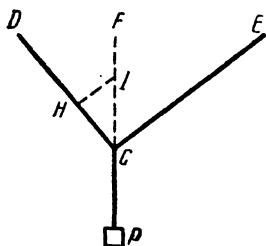


Рис. 27

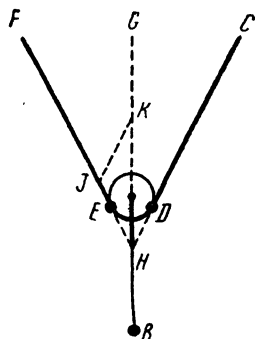


Рис. 28

Задача решена совершенно правильно. Треугольник  $CIN$  можно рассматривать как современный треугольник Стевина с той лишь разницей, что стороны его представляют не силы, а только пропорциональные им длины. Никаких формулировок и доказательств Стевин не дает: имеется лишь чертеж с объяснением.

Можно было бы признать за Стевином право открытия силового треугольника, если бы не было второго добавления — «Трохлеостатика». В ней Стевин рассматривает силы, действующие в полиспастах. Если все веревки вертикальны, то, разделив величину поднимаемого груза на число веревок, получаем силу, которую надо приложить к свободному концу веревки полиспаста, чтобы получить равновесие. Этот случай был рассмотрен в «Механике» Герона и ничего нового не представляет. Но Стевину надо было получить совершенно новый результат, а именно — рассмотреть случай полиспаста с двумя непараллельными веревками.

На рис. 28 груз  $B$  прикреплен к блоку  $ED$ , лежащему на веревке  $FEDC$ , конец  $C$  которой закреплен, а  $F$  удерживается рукой.

Линия (веревка), на которой висит груз  $B$ , продолжена вверх к точке  $G$  (линия  $BG$ ), а  $FE$  — вниз до пересечения ее линией  $BG$  в точке  $H$ . После этого через какую-либо точку  $I$  веревки  $HF$  проводится линия  $IK$  параллельно  $DC$  до пересечения ее линией  $BG$  в точке  $K$ .

Как линия  $IK$  относится к линии  $KH$ , так и приходящийся в точке  $F$  вес относится к заданному весу  $B$ . Так же как линия  $HI$  относится к линии  $IK$ , так и вес, приходящийся в точке  $F$ , относится к весу длины  $DC$ . Никакой формулировки и доказательств нет; это похоже на записи Леонардо да Винчи. Таким образом, приведенный чертеж доказательной силы иметь не может, тогда как в сочинении «Beghinselen» все это имеется полностью.

Во втором добавлении «Трохлеостатика» рассмотрены силы, действующие в полиспастах. Если веревки параллельны, то, разделив поднимаемый груз на их число, получаем величину силы, которую надо приложить к свободному концу веревки, соответственно тому, как в «Механике» Герона. Интересен случай, когда веревки не параллельны. На рис. 28 груз  $B$  прикреплен к блоку  $ED$ , лежащему на веревке  $FEDC$ , конец  $C$  которой закреплен, а  $F$  удерживается рукой.

Линию (веревку), на которой висит груз  $B$ , продолжаем вверх к  $G$ , а  $FE$  — вперед до пересечения ее линией  $BG$  в точке  $H$ .

После этого через какую-либо точку  $I$  веревки  $HF$  проводим линию  $IK$ , параллельную  $DC$ , до пересечения ее линией  $BG$  в точке  $K$ .

Следовательно, что как  $I$  относится к  $KH$ , так и приходящийся на руку в точке  $F$  вес относится к заданному весу; как  $HI$  относится к  $IK$ , так и вес, приходящийся на руку в точке  $F$ , относится к весу, действующему на  $C$ ; каждый из них составляет половину веса, который к заданному весу находится в отношении  $HK$  и  $HI$  (на основании вышеприведенного замечания из «Спартостатики»).

Если  $G$  обозначает вес  $B$ , то действующая на точку  $F$  сила вычисляется по формуле

$$\frac{1}{2} G \frac{HK}{HI};$$

однако правильный результат был бы

$$G \frac{HI}{HK}.$$

По-видимому, ход мыслей Стевина был таков: если бы веревки  $EF$  и  $DC$  были параллельны, то на каждую из них действовала бы половина веса  $G$ ; поскольку же они не параллельны, то соответствующий вес должен быть больше половины  $G$ . Поэтому вес  $G$  должен быть увеличен в отношении соответствующих сторон  $KH$  и  $IN$  треугольника Стевина.

Основная причина неудачи Стевина, конечно, заключается в том, что векторный характер силы в его время был еще неизвестен.

## НИКОЛАЙ КОПЕРНИК. СОЗДАНИЕ ГЕЛИОЦЕНТРИЧЕСКОЙ СИСТЕМЫ

Николай Коперник родился 19 февраля 1473 г. в польском городе Торуни. В десятилетнем возрасте он потерял отца, умершего от чумы, и вместе со старшим братом Андреем был взят на воспитание братом матери — епископом Лукой Ваченродом. Ваченрод обратил большое внимание на образование своих племянников и в 1491 г. отдал их в Краковский университет, где астрономия изучалась на основе Птолемеевой. Это объясняется тем, что птолемеевские эпициклы с математической точки зрения представляли не что иное, как различные члены ряда Фурье; когда в настоящее время астрономы для определения координат планеты пользуются тригонометрическими рядами, то они, по существу, переводят геометрическую конструкцию Птолемея на язык математических вычислений. Как показала практика, определение положения планеты по методу Птолемея дает результаты в пределах точности, доступной для наблюдений невооруженным глазом, совпадающие с тем, которые получаются при пользовании современными методами.

Это обстоятельство привело к тому, что в Кракове к авторитету Птолемея относились с уважением, которое разделял и сам Коперник. Он писал, что люди, пренебрегающие древними учеными, похожи на спящих и грезящих на пороге храма науки\*.

Коперник пользовался всем аппаратом Птолемея — эксцентами и эпициклами; его основное произведение «О вращениях» написано по плану «Альмагеста», но лишь с некоторыми перестановками; больше того, в шестой книге своего произведения он дает латинский перевод ряда мест подлинного греческого текста Птолемея.

И все же в теории Птолемея была своя «Ахиллесова пята», которая так же неизбежно привела к ее крушению, как и в свое время неодинаковость продолжительностей времен года оказалась роковой для гелиоцентрической теории Аристарха. Теория Птолемея не могла объяснить одного явления, значение которого не было особенно большим в эпоху создания «Альмагеста», но сделалось важней-

\* См.: Коперник. О вращениях небесных сфер. М., «Наука», 1964, стр. 431.

шим около 1500 г. Это была так называемая прецессия равноденствий, которая укорачивает тропический год (от равноденствия до равноденствия) по сравнению с сидерическим (возвращение к тому же положению относительно неподвижных звезд). Это движение изменяет эклиптическую долготу звезды на один градус в столетие.

В эпоху установления юлианского календаря (старый стиль) принятая продолжительность гражданского года ( $365\frac{1}{4}$  дней) не очень отличалась от тропического, но эта несущественная разница, накапливаясь с течением времени, приводила к тому, что точка весеннего равноденствия, определяющая начало года, перемещалась по эклиптике навстречу движения Солнца, так что новое равноденствие происходило несколько раньше, чем ему следовало.

Вследствие этого за четыре века начало тропического года наступало на один день раньше, чем это следовало по календарю. По тропическому году определялись не только хозяйственные работы, но и некоторые церковные праздники, в первую очередь Пасха, что приводило, конечно, к некоторой путанице. Соответствующая ошибка была исправлена на Никейском соборе 325 г. В дальнейшем же этим вопросом не занимались, и он встал лишь в конце средневековья (Роджер Бэкон, Николай Кузанский и др.); к началу XVI в. разница в датах достигала десяти дней.

Астрономы не могли не только объяснить этого явления, но даже хотя бы приблизительно определить его характер. Первоначально считали, что перемещение точки весеннего равноденствия имеет периодический колебательный характер, и тогда его можно было бы учесть при помощи введения нового эпицикла. Однако эта точка шла вперед, переместившись в историческое время из созвездия Овна в созвездие Рыб, т. е. примерно на  $30^\circ$ .

Таково было положение в эпоху Коперника. В 1514 г. вопрос о реформе календаря рассматривался на Латеранском соборе в специальной комиссии, где председательствовал Павел Миддельбургский. Коперник не был официально приглашен на этот собор, но находился в переписке с Павлом и серьезно занялся этим делом.

Еще в Краковском университете Коперник узнал, что для определения движения какого-либо объекта необходимо установить, по отношению к какой системе отсчета, т. е. к какому неподвижному телу, это движение происходит — вопрос, который совершенно не ставился в механике Аристотеля. В рассматриваемом случае, т. е. в исследовании движения точки весеннего равноденствия, нужно было определить соответствующую систему отсчета. Единственной возможной такой системой могла быть только совокупность неподвижных звезд. Коперник так и сделал: в его книге «О вращении» он дал каталог неподвижных звезд, координаты которых отсчитывались не от переменной точки весеннего равноденствия, а от крайней звезды созвездия Овна.

Но если сфера неподвижных звезд (твердь «firmamentum») является совершенно неподвижной, то видимое ее вращение является лишь кажущимся; в действительности вращается Земля. Такого рода предположение делалось в древности Гераклидом Понтийским

и другими учеными (например, Селевком Вавилонским, который объяснял явление приливов вращением Земли), но отвергалось Птолемеем, который посвятил его опровержению первую книгу «Альмагеста». Поэтому естественно, что и Коперник в свою очередь большую часть первой книги «De Revolutionibus» посвятил критике птолемеевского опровержения.

Таким образом, был сделан первый шаг в установлении гелиоцентрической теории. Можно было представить, что центр Земли совпадает с неподвижным центром мира, через который проходит неподвижная ось вращения Земли.

Через центр Земли перпендикулярно оси вращения проводим плоскость, которая в пересечении с небесным сводом дает неподвижный небесный экватор. Изменение времен года на Земле можно определить движением Солнца по неподвижной эклиптике, причем Солнце находилось попеременно то выше, то ниже экватора, пересекая его в точках весеннего и осеннего равноденствий. Как точки пересечения двух неподвижных кривых эти точки тоже оставались неподвижными, т. е. прецессия была невозможной. Но она существовала. Перемещение точки весеннего равноденствия можно было объяснить лишь движением небесного экватора, а следовательно, и движением Земли.

К вопросу о движении Земли Коперник подошел очень просто: если Земля вращается вокруг своей оси, то посмотрим, не имеет ли она и каких-нибудь других движений. Он придавал Земле три вращения, хотя некоторые ученые, например замечательный историк астрономии Скъяпарелли, утверждают, что Коперник ошибся. Мнение о двух вращениях Земли — вращение Земли вокруг своей оси и вращение вокруг Солнца — вошло в науку со времен Галилея, который, как и многие люди его времени, не отличал вращения от кругового (поступательного) движения, тогда как Коперник под вращениями подразумевал действительные вращения в том смысле, как этот термин понимают современные механики.

Первым вращением является вращение Земли вокруг собственной оси  $NS$  с угловой скоростью  $\omega$  (рис. 29). Второе вращение представляет собой вращение этой  $NS$  вокруг оси  $OO'$ , проходящей через центр  $O$  орбиты Земли перпендикулярно к плоскости эклиптики с угловой скоростью  $\omega'$ ; в этом вращении плоскость  $OO'A$ , проведенная через обе оси  $OO'$  и  $NS$ , вращается вокруг неподвижной оси  $OO'$  и ось  $NS$  должна все время проходить через точку  $O'$ ;

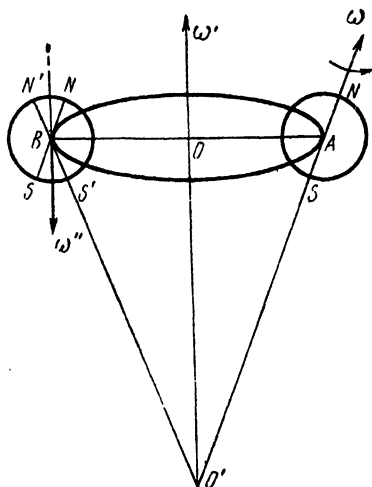


Рис. 29

следовательно, по истечении полуоборота, когда центр Земли из  $A$  переходит в  $B$ , ось Земли переходит в положение  $N'S'$ . Если бы Земля имела только два эти вращения, то на Земле не было бы смены времен года; на каждой широте происходила бы только смена дня и ночи, а время года оставалось постоянно одним и тем же.

В действительности же ось вращения Земли перемещается поступательно и в точке  $B$  занимает положение  $NS$ . Для осуществления перехода из положения  $N'S'$  в  $NS$  Коперник ввел третье вращение вокруг оси, проходящей через центр Земли  $B$  параллельно  $OO'$ , которое совершается с такой же угловой скоростью  $\omega''$  и тоже в течение года, но только в противоположную сторону. Оба эти вращения ( $\omega'$ ,  $\omega''$ ) образуют так называемую пару вращений, эквивалентную круговому поступательному движению с тем же годовым периодом.

Понятие о паре вращений в результате сложения двух равных и противоположных вращений с одинаковой угловой скоростью вокруг параллельных осей было введено в механику только в первой половине XIX в.; честь этого открытия не принадлежит Копернику: соответствующие примеры можно найти и в «Альмагесте» Птолемея.

Описанное построение Коперник использовал и для объяснения прецессии: он предположил, что вторая угловая скорость  $\omega''$  не равна  $\omega'$ , но лишь немного от нее отличается; разность этих угловых скоростей и объясняет явление прецессии — объяснение, почти совпадающее с современным.

В видимом движении планет наблюдаются два неравенства — относительно зодиака, которое учитывалось при помощи эксцента, и относительно Солнца, происходящее от движения Земли вокруг Солнца; в системе Птолемея второе движение изображалось при помощи эпицикла (первого и самого большого). В системе Коперника этот эпицикл устранялся путем предположения, что Земля движется вокруг Солнца. Для объяснения этого движения Коперник пользовался принципом, носящим в настоящее время его имя. Он состоит в следующем: *если сообщить обоим телам одинаковое движение, относительное движение двух тел не изменится.*

Пусть некоторая планета и Земля вращаются одновременно вокруг Солнца; требуется определить, каким представится движение планеты для наблюдателя, находящегося на Земле. Движение планеты вокруг Солнца можно считать в данный момент отсутствующим. Сообщим теперь и планете и Земле круговое движение, которое совершает Земля вокруг Солнца, но только в обратную сторону; тогда Земля остановится, а планета опишет окружность, равную орбите Земли, с такой же скоростью, как и Земля, но в противоположную сторону. Эта окружность и представляет эпицикл, который надо добавить к собственному движению планеты вокруг Солнца, чтобы получить ее видимое движение относительно Земли, предполагаемой неподвижной.

Окружность, представляющая видимое движение Земли, одинакова для всех планет Солнечной системы; поскольку же они находятся на различных расстояниях от Земли, то эпициклы дальних

планет наблюдаются меньшими, чем эпициклы ближних; так как это уменьшение прямопропорционально расстоянию, то можно определить отношения расстояний от планет до Земли и Солнца; если же известен радиус земной орбиты, то можно определить и истинные расстояния от планет. Так, Коперник мог построить модель Солнечной системы, в которой все планеты находились на определенных расстояниях от Солнца. Система Птолемея не давала такой возможности; по существу, нельзя было определить, лежат ли сферы Меркурия и Венеры вне сферы Солнца или же внутри ее. Равным образом нельзя было найти хотя бы относительные величины радиусов сфер для различных планет.

Это обстоятельство, а также и то, что в описании движения планет выбрасывался первый и самый важный эпицикл, представлявший неравенство относительно Солнца, делало систему Коперника более простой, чем птолемеевская. И вместе с тем система Коперника не получила сначала широкого признания.

Книга «О вращениях» Коперника вышла в свет в 1543 г., но дискуссия по поводу коперниковской системы мира возникла только в эпоху Галилея, т. е. примерно через семьдесят лет после появления книги.

Крупный европейский астроном Тихо Браге согласился с предположением Коперника, что все планеты вращаются вокруг Солнца, но он считал, что Солнце вращается вокруг подвижной Земли. Каким же образом можно объяснить это обстоятельство?

Все планеты в системе Коперника связаны между собой. Изучение этой системы в отрыве от других научных теорий его эпохи не могло помочь правильному пониманию течения событий.

Согласно господствовавшей в то время механики Аристотеля, все движения разделялись на естественные и насильственные. Земля вращается вокруг своей оси. К какому разряду движений принадлежит это вращение?

Коперник считал вместе с Аристотелем, что все тела природы стремятся к своему естественному месту; если они не находятся в нем, то их естественным движением является прямолинейное, направленное к этому месту: для частиц Земли это есть движение к ее центру. Если же эти тела находятся в своем естественном месте, то стремятся сохранить свое положение; поэтому их естественное движение является таким же, как и у вечных небесных тел, т. е. круговым. В этом заключается так называемый принцип космической инерции Коперника.

Отметим, что во времена Коперника были люди, которые все это хорошо понимали. В первой книге, излагающей систему Коперника, — в так называемом «Первом повествовании» Ретика, ученика Коперника, — есть глава «Похвала Пруссии», которая помещается не во всех изданиях Коперника (ее нет в юбилейном торнском издании 1872 г.). Эта глава очень важна в том отношении, что в ней рассказывается об истории возникновения «О вращениях».

Первоначально Коперник предполагал выпустить только астрономические таблицы без изложения своей теории, но его друг,

кульмский епископ Тидеман Гизе, убедил его, что было бы очень полезно и государству и церкви выпустить полное изложение его системы так, как это сделал в «Альмагесте» Птолемей. На первый взгляд это кажется странным, но вполне объясняется тем, что католическая церковь была заинтересована в реформе календаря. Против Коперника резко выступали протестанты и в первую очередь Лютер. Когда была произведена календарная реформа в 1582 г. (григорианский стиль), то изменилась и политика папства. Главным препятствием для распространения системы Коперника была аристотелевская механика. Разрушение этой механики стало основной задачей механиков XVII в. и в первую очередь Галилея и Гюйгенса.

## МЕХАНИКА ГАЛИЛЕЯ

Галилео Галилей, сын Винченцо Галилея, происходившего из обедневшего патрицианского рода, родился во Флоренции 15 февраля 1564 г. Флоренция в его время уже не была тем свободным городом, центром культурной жизни Италии и вообще Западной Европы, который дал великого поэта Данте Алигьери (1265—1321), архитектора Филиппо Брунеллески (1377—1446), живописца Леонардо да Винчи (1452—1519), политика Никколо Маккьявелли (1462—1527) и, наконец, скульптора Микеланджело Буонаротти (1475—1564) — свидетелей гибели свободы Флоренции и наступления феодально-католической реакции в Италии.

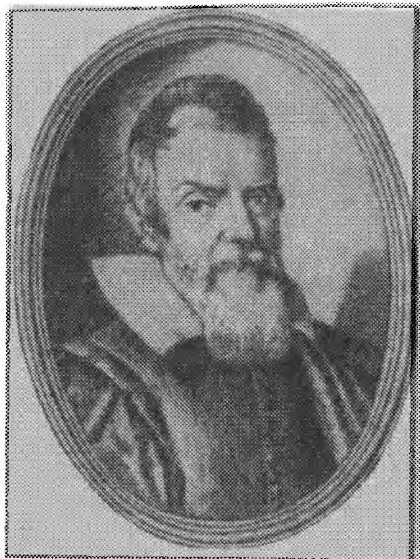
Эпоха Возрождения XIV—XV вв. была временем наивысшего расцвета городской жизни и культуры Италии. Близкое соседство с Византией, для которой в XIV в. росла угроза турецкого завоевания, способствовало бегству в Италию греческой интеллигенции, познакомившей итальянцев с греческим языком и античными классиками. В Италии стали развиваться литература и искусство, достигшие небывалой высоты. Средневековая схоластика заменялась гуманизмом, идеалом которого являлся гармонично развитый человек, далекий от аскетизма и умеющий красиво жить и свободно мыслить.

Вместе с тем нельзя не указать и на некоторые отрицательные стороны итальянского гуманизма. Крушение схолистического мировоззрения способствовало, как это характерно для переходных эпох, развитию мистических учений, которые особенно ярко проявились в XVI в.

Появилось также новое учение — философия Платона, которая сильно привилась в итальянских городах и больше всего во Флоренции. Наряду с развитием филологии, особенно классической, физико-математические науки не дали ни одного выдающегося представителя; новая астрономия Региомонтана, Пурбаха и Коперника создавалась вне Италии.

Развитие самостоятельности итальянских городов наряду с положительными имело и отрицательные качества: в то время как на

Пиренейском полуострове, в Англии и во Франции, а также и на востоке Европы — в Чехии, Польше, Венгрии и России — складывались национальные государства, Италия представляла собой ряд разрозненных городских республик и сделалась ареной борьбы между Испанией и Францией в первой половине XVI в. Победительницей в этой борьбе оказалась Испания, подчинившая прямо или косвенно почти всю Италию, за исключением лишь Венеции. В 1527 г. Рим был взят и разграблен ландскнехтами Карла V, а после этого — и Флоренция, где городская республика была уничтожена, сделалась столицей тосканских герцогов из рода Медичи; эпоха Возрождения пришла к концу и сменилась феодальной реакцией.



Г. Галилей (1564—1642)

В такой исторической эпохе развивалась научная деятельность *Галилео Галилея* (1564—1642). С 1589 по 1592 г. он работал преподавателем в Пизанском университете, в котором получил образование. Положение его в материальном отношении было очень тяжелым и он переехал в Венецию, где стал профессором Падуанского университета. Годы его пребывания в Венеции (1592—1610) были наиболее счастливым временем его жизни: он приобрел большое количество друзей (недаром в его основных сочинениях «Диалоги о двух системах мира» и «Рассуждения о двух новых науках» действие происходит в Венеции, где закончилось формирование научного облика Галилея).

В 1609 г. в жизни Галилея произошло важное событие; услышав об изобретении в Голландии зрительной трубы, он сконструировал оптический прибор (телескоп), который демонстрировался венецианским властям и получил их одобрение. Первоначально этот прибор предназначался для земных наблюдений на далеких расстояниях, но в январе 1610 г. Галилей направил его на небо и увидел там множество звезд, не видимых невооруженным глазом; при этом он открыл структуру Млечного пути и обнаружил у Юпитера наличие четырех спутников. Результаты этих наблюдений, опубликованных в «Звездном Вестнике», произвели фурор в ученом мире.

О своих дальнейших наблюдениях (наличие фаз у Венеры и особая форма Сатурна) он сообщил в зашифрованном виде. Во второй половине 1610 г. спутников Юпитера обнаружили также астрономы-иезуиты Римской коллегии, и Галилей получил общее

признание. Несмотря на удерживание со стороны венецианских друзей, он перешел на службу к тосканскому герцогу Козимо Медичи в качестве придворного философа и математика.

В последний период его деятельности (1610—1642) основной задачей, кроме борьбы за систему Коперника, было подведение итогов своих исследований о движении свободно падающих и брошенных тяжелых тел.

Первая задача была им решена недостаточно удачно. Во-первых, он не понял, каким образом Коперник представлял себе движение Земли; он не знал разницы между настоящим вращением тела вокруг неподвижной оси и круговым поступательным движением; во-вторых, описанная им в «Диалогах о двух системах мира» система мира, по существу, воспроизводила уже отброшенную систему Аристарха Самосского.

Хотя Галилей и считал, что «книга природы написана математическими знаками», но на практике он далеко не всегда пользовался математикой, так как предполагал, что законы природы должны быть выражены очень просто. В этом отношении знаменательно, что Галилей был дружен с Кеплером, находился с ним в переписке и не мог не знать об его первом законе, по которому планеты движутся по эллипсам. Далее Галилей полагал возможным доказать правильность системы Коперника явлением приливов, как это делал за две тысячи лет до него Селевк Вавилонский. Наконец (и это самое главное), из всей теории Коперника Галилей лучше всего усвоил наиболее слабую ее часть, а именно: понятие о космической инерции.

Самым ценным у Галилея была не его астрономическая деятельность, а то, что он первым заложил основы новой динамики; важна не его критика системы Птолемея, а нанесенный им удар по динамике Аристотеля. Всем известен его «Диалог о двух главнейших системах мира» (Птолемеевой и Коперниковой), но до конца XIX в. мало кто обращал внимание на его «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук». Этими двумя науками были сопротивление материалов и динамика; поэтому Галилея можно с полным правом назвать отцом двух этих новых отраслей физико-математических наук.

Рассмотрим динамику Галилея, которую он назвал «Наукой о движении относительно места» (*movimenti locali*); зная классификацию видов движения в «Диалектике природы», можно хорошо понять значение этого термина.

Сочинение «Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых начал» распадается на три части: о равномерном движении, о равномерно ускоренном движении и о принужденном движении брошенных тел.

Первая часть представляет интерес как последовательный этап в развитии понятия о скорости. В античной механике термина «скорость» еще не было. Имелись в виду более или менее скорые движения, равноскорые с самим собой, но скорость как особая величина не рассматривалась. У Галилея термин «скорость» имеется,

но он не дает определения скорости или способа ее измерения, а говорит только об отношениях двух скоростей. Если два тела движутся равномерно, то отношение скоростей их равняется отношению пройденных расстояний, умноженному на обратное отношение времен движения.

Во второй части («О равномерно ускоренном движении») понятие скорости расширяется: если в первой части Галилей следует античной терминологии, то здесь употребляемые им выражения являются в основном теми, которыми пользовался автор XIV в. Николь Оресм.

Николь Оресм был наставником французского короля Карла V (1337—1380) и окончил жизнь епископом Лизье. Он принадлежит к числу средневековых ученых, ставших известными лишь в недавнее время и вызвавших немалый интерес историков науки. Его считали предшественником Коперника, поскольку он предполагал о возможности движения Земли; в действительности он считал, что центр тяжести Земли должен совпадать с центром мира, и если на поверхности Земли происходят какие-либо передвижения, изменявшие положение центра ее тяжести, то Земля тоже должна перемещаться, чтобы ее центр совпадал с центром мира.

Он был противником астрологии и доказывал ее ненадежность тем, что вследствие несоизмеримости периодов движения небесных тел невозможны точные повторения их соединений, квадратур, противостояний и т. д., на основании которых делались предсказания. Эти повторения были бы возможны только в том случае, если бы отношения периодов движений небесных тел выражались рациональными числами. Но если периоды планетных движений абсолютно независимы между собой, то вероятность рациональных их отношений равна нулю, так как мощность множества рациональных чисел (счетное множество) бесконечно мала по сравнению с мощностью континуума, которым измеряется множество действительных чисел.

Оресма считали изобретателем аналитической геометрии, поскольку он пользовался геометрическим изображением изменения переменных величин. Однако соответствующая теория, изложенная Оресмом в сочинении «*De latitudinibus formarum*» (заглавие переводят как «О протяжениях форм», или «О конфигурации качеств»), имела большое значение для исследований Галилея; более того, терминология Оресма и до сих пор в какой-то мере сохраняется в современной науке.

Пусть значение какой-либо величины остается постоянным с течением времени. Если по горизонтали отложить последовательные моменты времени, то концы полученных отрезков окажутся на прямой, параллельной той горизонтали, по которой отложено время. Такое изменение Оресм называл равномерным (*uniformis*), т. е. равномерным. Если исследуемая величина представляет скорость, то график последовательности отложенных отрезков является прямоугольником, площадь которого изображает графически расстоя-

ние  $s$ , пройденное за время  $t$  в равномерном движении со скоростью  $v$  (рис. 30).

Если концы отложенных отрезков лежат на некоторой кривой, то изменение называется дифформным (*difformis*); если эта кривая — прямая линия, идущая из начальной точки отсчета, то соответствующее изменение называется равномерно-неравномерным (*uniformiter difformis*); в этом случае пройденное расстояние выражается площадью треугольника  $Obb'$  или прямоугольника  $Oa'bb''$ :

$$S = Ob \cdot aa',$$

т. е. оно равняется расстоянию, пройденному за то же время  $t$  в равномерном движении со скоростью, изображаемой отрезком  $aa'$ , соответствующей моменту времени, изображаемому отрезком  $Oa = \frac{1}{2} Ob$ . Это построение и явилось исходным для теории переменного движения.

Известно, что движение свободно падающего тела

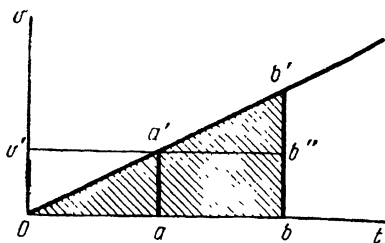


Рис. 30

ускоряется в процессе падения, но закон соответствующего изменения скорости долго оставался неизвестным; считали, что стремление тела к своему естественному месту увеличивается в зависимости от приближения падающего тела к этому месту. Приступая к определению этого закона, Галилей писал:

«Когда я замечаю, что камень, выведенный из состояния покоя и падающий со значительной высоты, приобретает все новое и новое приращение скорости, не должен ли я думать, что подобное приращение происходит в самой простой и ясной для всякого форме? Если мы внимательно посмотрим в дело, то найдем, что нет приращения более простого, чем происходящее всегда равномерно»<sup>\*</sup>.

Для Галилея оставался невыясненным вопрос, будет ли это изменение пропорциональным пройденному пути или времени. После некоторых колебаний он склонился к мнению, что пропорциональность пройденному пути следует отбросить, и определил, что свободное падение есть равноускоренное движение, в котором в равные промежутки времени получаются и равные приращения скорости.

В этом отношении интересна разница между взглядами Галилея и Кеплера. Круговое движение планет у Галилея Кеплер заменил более сложным движением по эллипсам; в случае свободного падения он нашел, что скорость падения возрастает пропорционально квадратному корню из пройденного пути.

Галилей сначала теоретически, а затем и опытным путем установил, что пройденные пути за первую, вторую, третью и т. д. секунды возрастают пропорционально ряду последовательных нечет-

<sup>\*</sup> Галилео Галилей Сочинения, т. I М., Государственное техническое издательство, 1934, стр. 292.

ных чисел: 1 : 3 : 5 и т. д. Затем он вывел закон изменения скорости пропорционально времени:

$$v = gt$$

и пройденного пути пропорционально квадрату времени

$$s = \frac{1}{2} gt^2.$$

Соответствующие измерения Галилей производил на наклонных плоскостях, учитывая данные Иорданом Неморарием изменения тяжести в зависимости от положения.

Динамические воззрения Галилея легко обнаруживаются из следующих слов:

«Рассматривая тело, брошенное вверх, я нахожу, что сила, давшая ему первоначальное движение, постепенно уменьшается; сила эта поднимает тело до тех пор, пока она превосходит противодействующую силу тяжести; но как только эти силы уравниваются, тело перестает подниматься и переходит в состояние покоя. При этом первоначально сообщенный импульс уничтожается не чем иным, как постепенным погашением первоначального излишка его над весом тела, каковой заставляет тело двигаться вверх. Так как уменьшение этого импульса продолжается, следствием чего является перевес силы тяжести, то начинается обратное движение, или падение тела, происходящее вначале медленно, вследствие противодействия первой силы, значительная часть которой еще сохраняется в теле; но так как эта последняя постепенно уменьшается и все в большей степени преодолевается силой тяжести, то отсюда и возникло постепенное ускорение движения» \*.

Галилей считал, что сила, двигавшая камень первоначально вверх, исчезает:

«Факт покоя, предшествующего падению камня и продолжающегося долгое или короткое время, или же одно лишь мгновение, не имеет никакого значения, так как камень не падает до тех пор, пока находится под действием силы, противодействующей его тяжести и достаточной для того, чтобы удержать его в покое» \*\*.

Отсюда становится совершенно ясным, что падение камня, которое Аристотель считал естественным, совершающимся без приложения какой-либо силы, в действительности является насильственным, происходящим под действием силы тяжести. Это была «первая брешь в стенах крепости Аристотелевой динамики». Кроме того, Галилей определил закон движения, совершающегося под действием постоянной силы; сейчас это соответствует тому, что постоянная сила производит постоянное ускорение, но во времена Галилея вплоть до самого XIX в. термин «ускорение» был неизвестен.

Этим исследование Галилея не заканчивается; он решает стоящую в начале XVI в. баллистическую задачу — определяет траекторию тела, брошенного под углом к горизонту; при помощи сложения движений он показывает, что при отсутствии сопротивления воздуха эта траектория была бы параболой.

Первым, оценившим громадное значение Галилея в деле создания новой динамики, был Эрнст Мах в своей книге «Die Mechanik in

\* Галилео Галилей. Сочинения, т. I, стр. 299—300.

\*\* Там же, стр. 301.

ихер Entwicklung» (1883). В дальнейшем слава Галилея как механика распространялась очень широко. Ему стали приписывать не только открытие второго закона Ньютона, на что, как видно из предыдущего, он имел некоторое право, но даже и открытие первого закона. Подробное исследование произведений Галилея показывает, что закон инерции он знал только в той форме, в какой он имеется у Коперника, — в форме закона космической инерции; движение тела, на которое не действуют силы, является равномерным движением по окружности.

Посмотрим, как Галилей показывал несостоятельность некоторых возражений, приводимых против вращения Земли. В просторном помещении под палубой корабля находился сосуд с истекающей из него водой и с плавающими рыбками, летающие мухи, бабочки и др. Если корабль движется равномерно и без качки в ту или другую сторону, то все явления внутри этого помещения происходят совершенно так же, как и в случае, когда корабль стоит неподвижно. При использовании этого для доказательства так называемого Галилеева принципа относительности необходимо учитывать, что равномерное движение корабля без изменения курса совершается не по прямой линии, а по окружности большого круга.

Можно привести и более сильное доказательство в пользу того, что закон инерции у Галилея понимался в смысле космической инерции. В «Диалоге о двух главнейших системах мира» утверждает, что мир есть тело, в высшей степени совершенное, и что в отношениях его частей должен господствовать наивысший и наисовершеннейший порядок.

Установив такое начало, из него можно непосредственно сделать вывод, что если тела, составляющие Вселенную, должны по природе своей обладать движением, то невозможно, чтобы движения их были прямолинейными и вообще какими бы то ни было, кроме как круговыми. То, что движется прямолинейным движением, меняет место и все больше удаляется от своей исходной точки; если такое движение ему естественно присуще, то оно с самого начала не находилось на своем естественном месте, значит, части Вселенной не расположены в совершенном порядке; стало быть, невозможно допустить, чтобы им, как таковым, по природе было свойственно менять места, т. е. двигаться прямолинейно.

Кроме того, так как прямолинейное движение по своей природе бесконечно, ибо прямая линия бесконечна и неопределенна, то невозможно, чтобы что-нибудь, движущееся от природы, обладало свойством движения по прямой линии, т. е. к цели, достигнуть которую невозможно. Если бы кто-нибудь стал утверждать, что природа произвольно намечает некоторые пределы\* и вкладывает в свои естественные тела естественные побуждения двигаться к этим пределам, то это подходит для мифа о том, что получилось из первичного хаоса. Для приведения его в порядок природа очень удачно воспользовалась прямолинейными движениями, которые

---

\* В греческом языке «конец» и «цель» выражаются одним словом «τέλος».

пригодны для того, чтобы ввести должный порядок в беспорядочные отношения.

Но после того как достигнуто наилучшее распределение и размещение, невозможно, чтобы в телах оставалась естественная склонность к прямолинейному движению, в результате которого получились бы только отклонения от надлежащего и естественного места. Прямолинейное движение может доставлять материал для сооружения; но раз последнее готово, то оно или остается неподвижным, или если и обладает движением, то только круговым.

Приведенный текст не оставляет никакого сомнения в том, что во всяком случае в год окончания «Диалога о двух главнейших системах мира» (1630) Галилей полностью придерживался идей Коперника о законе космической инерции.

Второе основное произведение Галилея «Беседа о двух новых науках» было закончено после катастрофы 1633 г. и вышло незадолго до смерти Галилея в 1638 г. в Нидерландах.

Исследуя движение брошенных тел, Галилей писал, что когда тело движется по горизонтальной плоскости, не встречая никакого сопротивления движению, то, как уже ясно из всего изложенного выше, движение его является равномерным и продолжалось бы бесконечно, если бы плоскость простиралась в пространстве без конца. Если же плоскость конечна и расположена высоко, то тело, имеющее вес, достигнув конца плоскости, продолжает двигаться далее таким образом, что к его первоначальному равномерному беспрепятственному движению присоединяется другое, вызываемое силой тяжести, благодаря чему возникает сложное движение, состоящее из равномерного горизонтального и естественного ускоренного движения; он его называл движением бросаемых тел.

Галилей доказывал, что траектория получающегося движения является полупараболой. Прочитав приведенную выше формулировку, можно сделать вывод, что в ней достаточно ясно выражено положение об инерционности по крайней мере горизонтального равномерного движения. Однако такой вывод был бы несколько преждевременным.

Участник диалога «официальный оппонент» Сагредо указал, что ось полученной полупараболы должна быть перпендикулярна к горизонту и оканчиваться в центре Земли. Так как горизонтальное составляющее движение все время удаляет брошенное тело от оси параболы, то никакое брошенное тело не может окончить движение в центре Земли; следовательно, действительная траектория падающего тела не может быть указанной полупараболой. В движении по упомянутой горизонтальной плоскости тело все время удаляется от центра Земли, так что и это горизонтальное движение не может быть равномерным.

Архимед в своей механике и книге о квадратуре параболы принимает как правильный принцип, что коромысло весов является прямой линией, равноудаленной во всех своих точках от общего центра всех тяжелых тел, и что нити, к которым подвешены тяжелые тела, параллельны между собой. Как Архимед, так и другие

ученые, исходили в своих рассуждениях из предположения бесконечной удаленности от нас земного центра. При такой предпосылке заключения их совершенно справедливы и доказательства абсолютно строги.

Таким образом, вся теория является лишь некоторым приближением к действительности, когда небольшая дуга окружности может быть принята за отрезок прямой. Следовательно, Галилею нельзя приписать честь открытия общего закона инерции: он знал его только в той форме, которую ему придал Коперник, где траекториями инерционного движения были окружности. Честь открытия закона инерции принадлежит Декарту.

## ИОГАНН КЕПЛЕР. УСТАНОВЛЕНИЕ ОСНОВНЫХ ЗАКОНОВ ПЛАНЕТНЫХ ДВИЖЕНИЙ

Иоганн Кеплер родился 27 декабря 1572 г. в городе Вейле в Вюртемберге. С раннего детства он был заброшен родителями. Кеплер учился в Тюбингенском университете и кончил его двадцати двух лет. О своих годах учения он говорит следующее:

«Когда я был уже в таком возрасте, что мог вкушать сладость философии, я с большой жадной обнимал все ее части, не налегая в особенности на астрономию. Все, что преподавалось в школах геометрического и астрономического, я усвоил без затруднения: знал фигуры, тела, отношения... никакой особенной склонности к астрономии не было. Воспитанный за счет герцога Вюртембергского, я решил отправиться, куда пошлют... Прежде всего открылась астрономическая должность, на которую меня также толкало уважение к моим учителям» \*.

Учителем Кеплера был Местлин, который знакомил избранных своих студентов с системой Коперника. На преподавательском месте в Граце (Штирия) Кеплер ревностно увлекся астрономией и написал свою первую работу «*Mysterium cosmographicum*» («Космографическая тайна») (1596). Задачей ее было раскрыть тайну «божественной архитектуры» в строении Солнечной системы и «охранить врата в храм славы для Коперника, приносящего жертву на высоком алтаре». В этой работе двадцатипятилетнего Кеплера уже выразились все его характерные черты: смелость мысли, часто приводившая к фантастическим увлечениям, и вместе с тем напряженная вычислительная работа, имевшая целью довести до конца развитие своей теории, как бы фантастична она ни была. В этом отношении Кеплер представляет диаметрально противоположность Галилею, который никакой фантастикой не увлекался и всегда стремился к конкретному.

О Кеплере есть прекрасная характеристика Д'Аламбера:

---

\* Н. А. Любимов История физики. М., 1896, стр. 593.

«Кеплер все подвергал вычислению; он не оставлял идеи, пока не докажет ее справедливость или ложность. Так дошел он до своих бессмертных открытий и вышел из ряда мечтателей, не имевших его смелости, веры и математических знаний» \*.

В своей первой работе после множества попыток он привел следующую геометрическую картину распределения орбит планет около Солнца:

«Орбита Земли есть мерный круг; опиши около него додекаэдр, обнимающий его круг будет Марс. Около Марса опиши тетраэдр; обнимающий его круг будет Юпитер. Около Юпитера опиши куб, обнимающий его круг будет Сатурн. Впиши в орбиту Земли икосаэдр; вписанный в него круг будет Венера. Впиши в Венеру октаэдр, вписанный в него круг будет Меркурий. Вот и получается отношение (rationem) числа планет» \*\*.

Открытие этого построения приводит Кеплера в величайший восторг:

«Никогда не выражу словами того наслаждения, какое почерпнул я в этом открытии. Я не жалел более потерянного времени, не скушал трудом, не останавливался ни перед какими трудностями вычислений, проводя за ними дни и ночи» \*\*\*.

Это сочинение Кеплер послал своему учителю Местлину. Тот восхитился трудом молодого ученого, высказал самое благоприятное мнение о нем герцогу Фридриху Вюртембергскому и позаботился о напечатании книги. Она была разослана выдающимся астрономам, в том числе Галилею и Тихо Браге. В 1598 г. владетель Штирии эрцгерцог Фердинанд, будущий император в годы Тридцатилетней войны Фердинанд II, начал гонение на протестантов. Кеплер, как лютеранин, должен был удалиться из Граца. Его изгнание совпало с переселением Тихо Браге с датского острова Гвен, где он устроил свою обсерваторию Ураниенбург, в Прагу.

Совместные занятия Кеплера и Тихо продолжались недолго. Тихо Браге скончался 24 октября 1601 г. Кеплер заменил его на посту директора обсерватории, получив богатейший материал сделанных Тихо многолетних наблюдений. Одиннадцатилетнее пребывание Кеплера в Праге (до 1612 г.) можно сравнить с пребыванием Галилея в Венеции по важности достигнутых в это время успехов. Разница была лишь в том, что Галилей уехал из Венеции по собственному желанию в ожидании (как ему казалось) лучшей и более почетной жизни, тогда как Кеплеру пришлось уехать из Праги после смерти Рудольфа II; его жизнь после этого была исполнена нужды и несчастий.

В 1609 г. вышла основная работа Кеплера «*Astronomia nova sive Physica coelestis*», или «*De motibus stellae Martis*», разработанная упорным трудом многих лет на основании наблюдений Тихо Браге.

Первой задачей Кеплера было определить для различных моментов времени расстояния от планеты Марса до Земли и затем, зная расстояние от Земли до Солнца, пересчитать их на расстоя-

\* Н. А. Л ю б и м о в. История физики, стр. 591.

\*\* Там же, стр. 595.

\*\*\* Там же, стр. 597.

ние от Марса до Солнца и вычертить описанную им траекторию. Эта траектория не оказалась кругом, как писал Галилей, и, кроме того, движение планеты было неравномерным. Еще одно отличие между Кеплером и Галилеем заключалось в том, что Галилей ограничился лишь описанием Солнечной системы, не ставя никаких вопросов о причинах этого движения. Кеплера же интересовали физические причины, о чем свидетельствует название «*Physica coelestis*».

Закон площадей у Кеплера первоначально имел иную форму: скорость планеты изменяется обратно пропорционально расстоянию от планеты до Солнца или, поскольку понятие мгновенной скорости было Кеплеру неизвестно, времена прохождения планетой одинаковых отрезков прямо пропорциональны расстояниям от планеты до Солнца (закон расстояний). Этот закон является совершенно точным вблизи апсид; в других местах орбиты он неверен, но нужно сказать, что получающиеся отклонения не так уже велики, поэтому Кеплер распространил его на всю орбиту. Это было результатом его физической теории о том, что планеты приводятся в движение некоторой *Species immateriata*, истекающей из Солнца, вращающейся вместе с ним и распространяющейся в плоскости эклиптики, последовательно слабея пропорционально удалению от Солнца. Впоследствии Кеплер понял, что так можно было объяснить лишь удаление планет от Солнца, и отказался от своего предположения.

Нанеся на плоскость последовательные положения планеты, Кеплер увидел, что получающаяся кривая имеет овальную форму, является ооидом, как он назвал ее. Он попробовал получить ее как результат комбинации эксцента с эпициклом. Движение по эпициклу он заменил гармоническим прямолинейным колебанием конца радиуса вектора, которое он приписал действию магнитной силы. Полученное смещение он, однако, направил не по радиусу эксцента, а перпендикулярно к линии апсид, так что эксцентр превратился в эллипс в результате сжатия в отношении большой и малой полуосей (первый закон Кеплера). При этом был изменен закон обратной пропорциональности скоростей расстояниям (закон расстояний).

Работая с эксцентром, Кеплер понял несовместимость закона расстояний с законом площадей и при переходе на эллипс принял обычную формулировку (второй закон). Однако полное выражение этого закона он оставил до «*Epitome astronomiae Copernicanae*» (1618; 1620); нужно отметить, что там же был впервые употреблен и термин «фокус».

Третий закон Кеплера, опубликованный им в «*Harmonices Mundi*», тоже явился результатом его дальнейшей работы над «*Mysterium cosmographicum*», так как данные им в этой книге построения он считал приближенными. Двадцать два года искал он вполне удовлетворительного решения поставленной им задачи о гармонии мира, пока его не озарила мысль, что к планетным расстояниям нужно добавить и времена их обращений.

«Если хочешь знать точное время открытия этого соотношения, то скажу, что 8 марта 1618 года оно было задумано, но дурно, к несчастью, вычисленное, отброшено как ложное; 15 мая вернулось с новой силой и рассеяло мрак моего ума. Оно в такой точности согласовалось с наблюдениями Тихо, что я думал, что брежу... Но дело оказалось вполне верно и в высшей степени точно: времена обращений планет относятся между собой как полуторные степени их средних расстояний» \*.

Последним произведением Кеплера были составленные им астрономические таблицы, так называемые Рудольфины (1627).

Конец жизни Кеплера был очень тяжелым. После смерти императора Рудольфа ему пришлось уехать из Праги. В 1618 г. началась Тридцатилетняя война и ему пришлось испытывать большую нужду. Он умер в 1630 г. в Регенсбурге.

Роль Кеплера в развитии астрономии гораздо больше, чем Галилея, который лишь популяризировал теорию Коперника. Кеплер же развил теорию Коперника и сделал возможным создание механики Ньютона.

## РЕНЕ ДЕКАРТ. ФОРМУЛИРОВКА ЗАКОНА ИНЕРЦИИ

Последнее свое произведение «Беседы и математические доказательства о двух новых науках» Галилей, находящийся под надзором инквизиции, не мог опубликовать в Италии и передал рукопись французскому послу графу де Ноайль, который и напечатал книгу в Лейдене (Голландия). Этот факт как бы знаменует переход центра науки из Италии во Францию и Голландию.

В Западной Европе XVI век называют веком Реформации, но вряд ли последняя представляла особо прогрессивное явление. В Германии основной движущей силой было стремление светских князей захватить церковное имущество и препятствовать национальному объединению страны. Обе эти задачи были решены в полной мере, и после Вестфальского мира 1648 г. разоренная Тридцатилетней войной Германия представляла совокупность больших, малых и средних государств, вполне самостоятельных как во внутренней, так и во внешней политике.

Во Франции Реформация при Франциске I и Генрихе II носила более героический характер, за свободу веры погибали на кострах главным образом представители низших слоев общества, но в эпоху религиозных войн, заполнивших вторую половину XVI в., заражая примером немецких князей, в реформационное движение вступили феодальные дворяне главным образом южной Франции, в то время как главный город Франции Париж оставался упорно католическим. Когда Генрих IV решил, что «Париж стоит мессы», и перешел в католичество, то был заключен союз между городами и королевским абсолютизмом; Франция начала понемногу оттеснять Испанию и выходить на первое место.

В Нидерландах, которые в XV и XVI вв. были самой богатой, торговой, промышленной и культурной страной атлантического побережья Средней Европы, положение было сложнее; там борьба

\* Н. А. Л ю б и м о в. История физики, стр. 597.

за свободу совести осложнилась борьбой против иноземного владычества. Когда эта борьба окончилась освобождением северной половины Нидерланд, «Семь провинций» с Голландией во главе стали самой свободной страной, где можно было печатать любые книги и где пышным цветом развивалась наука в лице Стевина, Снеллия, Гроция и др. С Нидерландами связана также и жизнь Декарта, проведшего в ней много времени и имевшего большое число друзей, в частности Константина Гюйгенса — отца знаменитого Христиана Гюйгенса.

*Рене Декарта* (1596—1650), или Картезия (Cartesius — латинизированная форма для Descartes), справедливо называют первым человеком нового времени, мировоззрение которого в большей или меньшей степени определяло образ мышления ученых трех веков. Около 1900 г. московский профессор физики Н. А. Умов охарактеризовал современное ему направление физики как картезианское. Университетская наука XVI—XVII вв. характеризовалась двумя крайностями: с одной стороны, был широко развит культ Аристотеля; с другой стороны, умы, разочаровавшиеся в схоластических словопроениях, отказывались от веры в науку и предавались мистическим учениям.

Задачей Декарта была борьба с обоими упомянутыми течениями; нужно было, отказавшись от слепой веры в авторитет, утверждать достоверность научного знания. Первые шаги на новом пути бывают наиболее трудными, и в деятельности Декарта можно отметить ряд противоречий, но это были противоречия развития.

Когда Декарт подверг критическому исследованию все положения философов, то пришел к убеждению, что можно сомневаться решительно во всем за исключением лишь одного: «Я мыслю, следовательно, я существую»; из этого положения он вывел свою философию.

Задачи науки Декарт видел не в комментировании классических произведений древних авторов, а в получении новых знаний путем опыта. Декарт не очень любил читать книги; если излагаемый предмет интересовал его, то он, усвоив основы, пытался получить остальные результаты самостоятельно. Экспериментам он посвящал много времени, правда, не всегда удачно; в своей физике и механике он старался соединить теоретическое познание с практическим искусством, и наоборот, результаты физических и механических опытов подвергал математической обработке.

В области математики Декарт вместе с Ферма положил начало аналитической геометрии. Когда его друг Константин Гюйгенс попросил изложить основы теории машин, Декарт составил математически разработанный трактат по механике, где он измерял силу производимой ею работой; сила, могущая поднять 2 фунта на 1 фут, или 1 фунт на 2 фута, считалась вдвое большей по сравнению с силой, поднимающей 1 фунт на 1 фут; это определение вполне соответствует духу статики Иордана Неморария — Стевина.

Кроме того, в своих «Основаниях философии» (§ 37, 39, 40) Декарт формулировал закон инерции в таком виде: «Первый закон —

всякое тело остается в том состоянии, в котором оно находится, пока какие-нибудь другие причины его не изменяют.

Второй закон состоит в том, что, в частности, каждая материальная частица, продолжая свое движение, никогда не стремится двигаться по кривым линиям, а только по прямой. Всякое тело, движущееся по кругу, все время стремится удалиться от описываемой им окружности; можно даже чувствовать это рукой».

Механические представления Декарта были настолько сильными, что даже живой организм он рассматривал как некоторую машину, делая исключение лишь для человека, в котором, по его мнению, с механизмом тела соединяется непротяженная душа, во всем отличная по своей природе от тела.

Особенно важной была введенная Декартом идея об эволюции мира, постепенном его развитии, вместо общераспространенного представления о его создании. Эта идея была выражена Декартом в его трактате «О мире», цель которого — дать новую механическую картину мира. Учение Декарта о системе мира, его космология, была тесно связана с Декартовой теорией материи. Декарт отрицал возможность пустоты; по его представлениям, вся Вселенная была заполнена материей, находящейся в вихревом движении. При помощи этих вихрей Декарт объяснял круговые движения планет вокруг Солнца; кометы он рассматривал как тела, которые могут переходить из одного «мира» (из области одного вихря) в другой; Солнечная система, по мнению Декарта, была лишь одним миром среди других.

Космология Декарта была универсальной: развитие шло от образования основных видов материи (трех элементов различной степени тонкости), участвовавших в вихревом движении, к образованию небесных тел и Земли, появлению органической жизни на ее поверхности и, наконец, человека; богу в этом процессе предоставлялась лишь скромная роль создания материи, развитие которой шло после этого вполне самостоятельным путем.

Книга «О мире» не была закончена, так как в 1633 г. состоялось осуждение Галилея и запрещение коперниковой системы мира, которая должна была стать основой космологической системы Декарта. Декарт в своих книгах описал широкую картину, охватывающую весь мир, вместо того чтобы строить эту картину по крохам, полученным в результате кропотливых исследований; во всяком случае Декартова идея эволюции, лежавшая мертвым грузом в течение двух веков, дала блестящие результаты в XIX в.

## КОЛИЧЕСТВО ДВИЖЕНИЯ. ВЕКТОРНОЕ ПОНЯТИЕ СИЛЫ. ЗАКОН ПАРАЛЛЕЛОГРАММА СИЛ

С именем Декарта связано введение в динамику понятия о количестве движения, или импульса. Рождение этого понятия появилось во Франции в середине XIV в. в связи с начавшейся уже критикой положений схоластической философии Аристотеля, который считал необходимым для произведения движения наличие посто-

янного двигателя, находящегося в тесной связи с движимым телом. В области астрономии эту роль выполнял так называемый «первый двигатель», непрерывно движущий небесные сферы. Этот «первый двигатель» схоластики отождествляли с богом.

Парижский ученый Жан Буридан считал, что для получения движения достаточно дать телу «импульс»; при отсутствии сопротивлений движения в надлунном мире этот мгновенно действовавший импульс будет вечно двигать небесные сферы. Буридан рассматривал преимущественно так называемый вращательный импульс, но развитие военной техники конца средневековья распространило понятие импульса и на прямолинейное движение.

В XIV в. произошло нечто аналогичное тому, что было в IV в. до н. э., когда введение метательных машин у греков заставило пересмотреть основные понятия динамики Аристотеля. Разница заключалась только в том, что криволинейное движение камня, выброшенного из баллисты, заменилось прямолинейным движением пули из мушкета или ядра из пушки.

Так как направление движения выстреленной пули было (по крайней мере в начальный момент) прямолинейным, то действовавшая на нее «сила», получившая у итальянских инженеров название *impeto*, кроме величины приобрела также и направление. Ее величина считалась пропорциональной количеству вещества (вещу) тела, вылетевшего из дула орудия, и сообщенной скорости, а направление последней определяло также и направление «силы». В результате в определении силы вошло новое понятие, неизвестное античной механике: сила сделалась вектором.

Так возникло понятие о количестве движения, которое имело большое значение в философии Декарта, в частности в его исследованиях, касающихся теории удара. После Галилея можно было считать решенным вопрос о движении тела под действием силы тяжести. Но ведь сила тяжести не является единственной силой, которая может приводить в движение тела; они могут двигаться также под действием толчка или удара. Поэтому первая половина XVII в. богата трудами, касающимися удара тел. В первую очередь следует назвать самого Галилея, который исследование явлений удара рассматривает в сочинении «Беседы о двух новых науках». Полученные им результаты не имеют большого значения; с исторической точки зрения интересно лишь введение понятия о «мертвом грузе» — статическом действии наложенного груза; примерно через семьдесят лет оно появилось в классификации Лейбница, который делил все силы на живые и мертвые.

Теорией удара занимался и Декарт. К этой теории относится третий закон движения, сформулированный Декартом так: если одно тело встречает другое и если оно имеет менее силы для продолжения движения, чем встречаемое для сопротивления, то оно изменяет направление, не теряя ничего из своего движения; если же оно имеет больше силы, то увлекает с собой встречаемое тело, причем теряет из своего движения столько, сколько передает его встречаемому телу.

Это так называемый закон сохранения количества движения, который Декарт распространил на всю Вселенную (сумма всех количеств движения мира есть величина постоянная). Нужно отметить, что количество движения Декарт понимал как абсолютную величину, не имеющую ни знака, ни направления. Для удара тел, движущихся по одной прямой, Декарт дал целый ряд правил без доказательств, как сами собой разумеющиеся.

На неудовлетворительность этих правил позднее указал Гюйгенс. В частности, он отметил, что, исследуя явления удара двух тел, движущихся по одной прямой, в зависимости от направления движения количеству движения нужно придавать знак «плюс» или «минус».

Если величины (массы) сталкивающихся тел одинаковы, то изменение их скоростей описывается как передача части скорости от одного тела к другому. Если же массы тел не одинаковы, то изменение скоростей описывается как передача движений «Движение» (*motus*) Декарта есть не что иное, как количество движения. А если эти тела двигались бы не по одной прямой, или одно из них — ударяемое тело — было в момент удара неподвижным? Тогда, конечно, приобретенное движение имело направление сообщенной скорости, т. е. было векторной величиной, направление которой характеризовалось направлением сообщенной скорости. Если одно и то же тело, находясь в состоянии покоя, испытывало различные удары, то отношения полученных движений могли бы характеризоваться только величинами сообщенных скоростей.

Различные движения одного и того же тела можно было изображать перемещениями, которые это тело получало за один и тот же определенный промежуток времени.

Таким образом, сила удара, а затем и вообще любая сила, могла быть охарактеризована величиной перемещения тела за некоторый определенный промежуток времени; сила в свою очередь приобретала векторный характер. Но тогда сложение сил, приложенных к одному и тому же телу, сводилось к сложению соответствующих скоростей, а так как законы сложения скоростей были известны еще со времен Аристотеля, то появился знаменитый закон параллелограмма сил. Трудно сказать, кто из механиков XVII в. первым установил этот закон; это мог быть Джон Валлис (1616—1703), рассматривший параллелепипед сил, или французский механик Жиль-Персонн Роберваль (1602—1675), применявший сложение и разложение сил по закону параллелограмма, но можно проследить, как это было сделано.

Второй закон Ньютона в своей первоначальной форме читается так: изменение движения (*motus*) пропорционально приложенной силе и совершается по направлению той прямой, по которой действует эта сила.

Много спорили о точном переводе слова *motus*; так как это изменение имеет определенно векторный характер, то под ним можно понимать только количество движения.

Доказательство закона параллелограмма имеется в первом следствии из трех основных законов Ньютона\*.

Следствие 1. При совокупных силах тело описывает диагональ параллелограмма в то же самое время, что и его стороны при раздельных силах.

Если тело при действии в месте  $A$  (рис. 31) одной только силы  $M$  перенеслось бы в продолжение заданного промежутка времени равномерным движением из  $A$  в  $B$  и если бы при действии в том же месте одной только силы  $N$  оно перенеслось бы из  $A$  в  $C$ , то при действии обеих сил оно перенесется в то же самое время из  $A$  в  $D$  по диагонали параллелограмма  $ABCD$ .

Так как сила  $N$  действует по направлению прямой  $AC$ , параллельной  $BD$ , то по второму закону эта сила нисколько не изменит той скорости приближения к прямой  $BD$ , которая была произведена первой силой. Следовательно, тело в продолжение данного времени достигнет линии  $BD$  независимо от того, была ли сила  $N$  приложена или нет. На основании такого же рассуждения к концу того же промежутка времени тело должно находиться и где-либо на прямой  $CD$ , следовательно, оно должно быть в их пересечении  $D$ . Переходит же оно из  $A$  в  $D$  прямолинейно на основании первого закона.

Следствие 2. Отсюда явствует составление силы, направленной по  $AD$  из каких-либо двух наклонных друг к другу  $AB$  и  $BD$ , и наоборот, разложение любой силы, направленной по  $AD$ , на наклонные  $AB$  и  $BD$ . Как это сложение, так и разложение беспрепятственно подтверждаются в учении о машинах (механике).

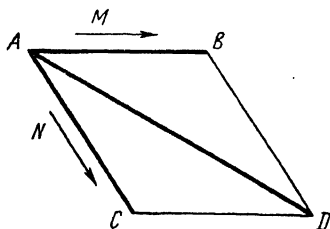


Рис. 31

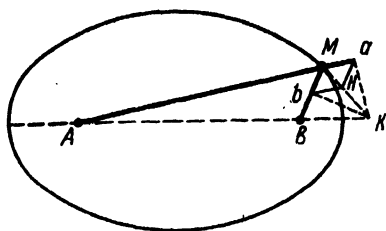


Рис. 32

Вероятно, что приведенное Ньютоном доказательство закона параллелограмма воспроизводит обычно употреблявшиеся рассуждения. Прежде всего, статика не очень занимала Ньютона, основной целью которого было динамическое обоснование планетных движений. Затем следует отметить стандартный евклидовский стиль изложения: формулировка — построение — доказательство.

По существу, оно воспроизводит аристотелевский паралле-

\* См.: «Математические начала естественной философии» в переводе А. Н. Крылова. Известия Николаевской морской академии, вып. IV. Пр., 1915, стр. 38—40. Изд. 3. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.

грамм скоростей, который тоже доказывался при помощи перемещений. В действительности же между обоими параллелограммами имеется очень существенная разница; можно представить, что на тело действуют две силы, но трудно вообразить, что тело в данный момент имеет две скорости относительно одной и той же системы отсчета. В аристотелевском доказательстве параллелограмма скоростей очень ясно видно, что одна из складываемых скоростей переносная, а другая относительная; тогда как в параллелограмме сил обе складываемые силы совершенно равноправны.

Неправильное применение параллелограмма скоростей может привести к очень серьезным ошибкам. Рассмотрим такой пример. Задача о проведении касательных к кривым в XVII в. иногда решалась методом Роберваля. Он заключался в том, что заданная кривая рассматривалась как траектория точки в некотором движении: направление скорости этой точки и давало касательную. Покажем, каким образом по методу Роберваля находится касательная к эллипсу (рис. 32).

Эллипс определяется как геометрическое место точек  $M$ , сумма расстояний которых до фокусов  $A$  и  $B$  остается постоянной. Проведем радиусы-векторы  $AM$  и  $BM$ . Можно считать, что перемещение  $Ma$  точки  $M$  по радиусу-вектору  $AM$  равно ее перемещению  $Mb$  по радиусу-вектору  $MB$ . Построив параллелограмм  $MaHb$  на этих перемещениях (он будет ромбом), найдем, что представляющая направление скорости диагональ  $MH$  является биссектрисой угла  $aMb$  между векторами, что соответствует действительности. Однако если нужно найти величину соответствующей скорости, то она не будет равна  $MH$ .

Правильное решение. Точка  $M$  движется по прямой  $AM$  со скоростью  $Ma$  относительно этой прямой, а прямая  $AM$  совершает переносное движение, вращаясь вокруг  $A$ . Абсолютная скорость точки  $M$  равна сумме относительной скорости  $Ma$  и переносной, которая перпендикулярна к  $AM$  и пойдет по  $aK$ . Рассматривая движение  $M$  относительно радиуса  $MB$ , получим, что абсолютная скорость точки  $M$  равна сумме относительной скорости  $Mb$  и переносной, которая пойдет по перпендикуляру  $bK$ . Отсюда получается, что истинная скорость точки  $M$  изображается диагональю  $MK$  не ромба  $MaHb$ , а дельтоида  $MaKb$ . Направление скорости точки  $M$  получилось правильным вследствие того, что отношение скоростей  $Ma$  и  $Mb$  равняется единице; если бы оно отличалось от единицы, то оказалось бы неверным и направление скорости.

После Ньютона в XVIII в., начиная с Даниила Бернулли, делается целый ряд попыток доказать закон параллелограмма совершенно самостоятельно, ограничиваясь лишь чисто статическими понятиями.

В эпоху Ньютона геометрическая статика на плоскости достигает своего завершения. Современник Ньютона французский математик Вариньон (1654—1722) в книге «Новая механика или статика», вышедшей после его смерти в 1725 г., изложил курс статики плоской системы сил с техническими приложениями, опираясь на

закон параллелограмма сил и уравнение моментов. Закон параллелограмма он так же, как и Ньютон, доказывал при помощи сложения движений точки. Так как проспект курса Вариньона был представлен Парижской Академии в 1687 г. почти одновременно с выходом «Начал» Ньютона, то взаимное влияние двух авторов является исключенным; доказательство Ньютона было общепринятым. Вариньону принадлежит теорема о моменте равнодействующей плоской системы сил, а также графический метод определения равнодействующей сил, лежащих в одной плоскости, при помощи веревочного многоугольника. В книге «Новая механика или статика» отдельно рассматривается определение условий равновесия на основании принципа возможных перемещений.

После Вариньона отмечается застой в развитии геометрической статики; все внимание механиков обращается на разработку динамики, и притом аналитическими методами. Геометрические методы Вариньона оказываются настолько забытыми, что в XIX в. инженер Кульман снова изобрел метод веревочного многоугольника, который в некоторых книгах (например, в ранних изданиях курса теоретической механики Николай) так и называется методом Кульмана.

## ХРИСТИАН ГЮЙГЕНС. НОРМАЛЬНОЕ УСКОРЕНИЕ. ЦЕТРОБЕЖНАЯ СИЛА. МАЯТНИК

*Христиан Гюйгенс* (1629—1695) происходил из рода, который принимал большое участие в политической и культурной жизни Голландии. Его дед был секретарем героя освободительной борьбы Вильгельма I Оранского, затем секретарем Государственного Совета при его брате Морице, которого он сопровождал в походах. Отец Гюйгенса — Константин Гюйгенс, тоже служивший Оранскому дому секретарем штатгальтера, а затем советником Вильгельмов II и III, хорошо был известен и вне Голландии. Он получил великолепное образование: знал языки и литературу многих народов и различных эпох и сам писал поэтические произведения по-латыни и по-голландски. Он обладал научной любознательностью: интересовался математикой, механикой и оптикой. Его друзьями было много замечательных людей различных национальностей, в том числе и знаменитый Декарт, для которого в Голландии семья Гюйгенсов была самой близкой; для Константина Гюйгенса Декарт даже написал целый трактат по механике. Влияние Декарта сильно отразилось и на Христiane Гюйгенсе, особенно в начале его жизни.

Христиан Гюйгенс вместе с братом получил хорошее образование еще в доме: его учителем в области математики был Схоутен, познакомивший своего ученика с классическими авторами античной математики Архимедом и Аполлонием, а также и с произведениями Декарта. Оба брата очень много занимались по своей инициативе и механическими искусствами: в частности, они много работали над конструкцией астрономических инструментов; шлифованием

сферических стекол Гюйгенс занимался и в старости до тех пор, пока мог стоять у станка. Вращаясь в кругу Декарта, молодой Гюйгенс находился в переписке с Мерсенном, письма которого заменяли в то время современные научные журналы; от Мерсенна Гюйгенс узнал и о Галилее.



Х. Гюйгенс (1629—1695)

В 1646 г. в руки Гюйгенса попала книга Хуана Карамуэля Лобковича, бывшего профессором богословия испанского университета в Алькала. Лобкович отвергал установленные Галилеем законы падения и заменил их своими, полученными из опыта; эти законы сводились к тому, что пути, проходимые в первую, вторую, третью единицы времени, относились как числа 1, 2, 3. Гюйгенс, полагая, что опыт «часто обманывает», для закона Лобковича применил следующее рассуждение. Выберем в качестве единицы длины путь, проходимый падающим телом в первую секунду; тогда последовательные пути, проходимые в первую, вторую, третью секунды, будут равны 1, 2, 3 единицам длины, а весь путь представится суммой

$$1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots$$

В качестве единицы времени можно выбрать не одну секунду, а две секунды; тогда пути, проходимые в последовательные новые единицы времени, будут

$$1 + 2 = 3; 3 + 4 = 7; 5 + 6 = 11 \text{ и т. д.}$$

По закону Лобковича требуется, чтобы они равнялись 3, 6, 12 и т. д. Полученное противоречие и отрицает возможность существования такого закона. Исходя из требования независимости от выбора единиц измерения, Гюйгенс, еще не знакомый с «Беседами о двух новых науках» Галилея, находит, что пути, проходимые телом в последовательные единицы времени, должны относиться как последовательные нечетные числа 1, 3, 5 и т. д.

Из всех древних математиков Гюйгенс больше всего ценил Архимеда, о котором писал как о математике, ни с кем не сравнимом.

Первыми самостоятельными произведениями Гюйгенса были сочинения: «О равновесии плавающих тел», опубликованное только

в Полном собрании его сочинений, и «О квадратуре круга» — оба они продолжали исследования Архимеда. В дальнейшем его увлекла диоптрика — наука о преломлении света, над которой он работал до конца своей жизни, так и не приведя ее к окончательному завершению.

Требовательность Гюйгенса к своим произведениям была исключительно большой; вследствие этого он во многих случаях потерял право на приоритет открытий, чем и можно объяснить то обстоятельство, что он так и остался сравнительно незаметным. Вместе с тем Гюйгенс смог построить настолько хорошие телескопы, что с их помощью ему удалось открыть самый большой спутник Сатурна Титан, а также установить наличие колец Сатурна. Оба эти открытия сделали имя Гюйгенса известным для французских ученых.

К 1652 г. (Гюйгенсу в это время было 23 года) относится сочинение «Об ударе тел», в котором он закончил исследование, начатое не совсем удачно Декартом. И это сочинение осталось неопубликованным при жизни Гюйгенса.

Прежде всего он указал расхождение с действительностью правил, установленных Декартом для удара.

Основные аксиомы Гюйгенс формулирует так: если два одинаковых тела движутся прямо навстречу друг другу с одинаковыми скоростями, то каждое из них отскакивает с той же скоростью, какую оно имело до удара. Это показывает, что Гюйгенс рассматривает так называемый абсолютно упругий удар.

Следующая аксиома выражается так: движения тел, а также и их скорости следует понимать равными между собой лишь по отношению к другим телам, которые рассматриваются как бы покоящимися, хотя эти тела вместе с первыми участвуют в другом общем движении. Поэтому если два тела движутся навстречу друг другу, хотя они одновременно находятся, кроме того, и в другом равномерном движении, то по отношению к телу, движущемуся общим с ними движением, удар между ними произойдет совершенно так же, как при условии отсутствия добавочного общего движения.

С точки зрения современной физики, эта аксиома формулирует принцип относительности в той форме, которая неправильно называется принципом Галилея. Эта аксиома играет активную роль в доказательстве дальнейших предложений; в частности, на обоих упомянутых аксиомах основывается доказательство предложения 1: если в покоящееся тело ударяет другое, одинаковое с ним, то после удара второе тело остановится, а то, которое ранее покоилось, получит такую же скорость, которая была у ударяющего тела.

Доказательство заключается в том, что удар, происходящий в неподвижной системе отсчета, рассматривается в другой системе, движущейся со скоростью, равной той, которая первоначально имела у одного из ударяющихся тел.

В качестве третьей аксиомы Гюйгенс использует так называемый принцип Торричелли: в движении тел, происходящем от действия их тяжестей, общий центр тяжести этих тел не может подняться выше первоначального положения.

При помощи этого принципа доказывается закон сохранения живых сил при ударе: при взаимном ударе двух тел величина, получающаяся после сложений величин каждого тела (его массы), помноженной на квадрат его скорости до удара, равна той, которая получится после удара.

У Гюйгенса соответствующая величина  $mv^2$  (или  $\frac{1}{2}mv^2$ ) еще не имеет названия; приблизительно через пятьдесят лет Лейбниц назовет ее «живой силой».

Таким образом, Гюйгенса надо поставить в начале длинного ряда исследователей, работающих в установлении закона сохранения энергии. За два года до смерти в 1695 г. он сформулировал его так: в любых движениях тел ничего не теряется и не пропадает из сил, разве только в определенном действии, для произведения которого требуется такое же количество силы, какое и убыло. Силой же назовем потенцию, необходимую для поднятия груза. Двойной силой будет та, которая может поднять один и тот же груз на вдвое большую величину.

В данном случае имеется в виду лишь закон сохранения механической энергии; это необходимое дополнение закона Декарта о сохранении количества движения.

В 1668 г. Гюйгенс изложил теорию удара в Парижской Академии наук; в конце того же года вопрос об исследовании удара был поставлен и в лондонском Королевском обществе, которое обратилось с просьбой о присылке своих теорий к Гюйгенсу, Рену (Wren — строитель Собора св. Павла в Лондоне) и Валлису.

Теория Рена, разработанная в 1660 г., оказалась в точности совпадающей с теорией Гюйгенса; теория Валлиса рассматривала удар, который называется теперь абсолютно неупругим.

С 1655 г. в творчестве Гюйгенса появилась новая тема, вызвавшая большое количество исследований вплоть до самого конца его жизни. Эта тема — конструкция точных часов — отвечала насущнейшей потребности, которую ощущала не только Голландия, но и весь западный мир XVII в., особенно страны, лежащие на побережье Атлантического океана.

Плавание в океане ставило для кораблевождения более сложные задачи, чем в Средиземном море, где можно было держать курс по звездам. В океане, где плавание продолжалось неделями и месяцами, чтобы не умереть от голода и жажды, необходимо было точно знать положение в океане, иными словами, долготу и широту места нахождения. Определение широты места не представляло больших затруднений: зная склонение Солнца для данного дня, можно было, измеряя высоту Солнца над горизонтом в истинный полдень, определить с нужной точностью и широту места.

С определением долготы было значительно труднее. В древности ее определяли при помощи лунных затмений; если известно время затмения для какого-нибудь основного пункта, допустим Гринвича, и определено время его наступления для места своего нахождения, то по разности этих времен можно было найти разность долгот меж-

ду обоими местами, считая, что 1 ч разности соответствует 15° долготы.

Вместо лунных затмений Галилей предполагал изучать более часто наступающие затмения спутников Юпитера. Для этого следовало хорошо знать их движения, кроме того, наблюдение за ними требует хорошей аппаратуры. Проще было в качестве основного астрономического события рассматривать прохождение Солнца через меридиан данного места (истинный полдень) и определять его наступление по точным часам, поставленным по времени взятого основного пункта; в таком случае задача сводилась к построению точных часов.

В средние века башенные часы приводились в движение весом гири, равномерность опускания которой регулировалась последовательными остановками колеса с зубцами. Галилей, определивший, что периоды небольших колебаний маятника зависят только от его длины, а не от величины размахов, предложил для этой цели маятник. К сожалению, он сам не успел построить часы; его сын Винченцио начал строить модель таких часов, но не закончил, так что сохранявшаяся в Тоскане модель не действовала.

Около 1635 г. Галилей предложил Генеральным Штатам Голландии способ регулирования часов при помощи маятника, причем переписка шла через отца Гюйгенса. Дело это ничем не кончилось, но более чем вероятно, что Гюйгенс знал по крайней мере идею этого способа; во всяком случае он построил вполне пригодные часы в 1657 г., чего Галилею сделать не удалось.

Однако Гюйгенс на этом не остановился; он знал, что величина периода колебания маятника в известной степени зависит и от амплитуды его колебаний (Галилею это не было известно). Он попробовал другую систему регулирования — при помощи конического маятника, вращающегося вокруг вертикальной оси под определенным углом наклона к ней. Эта идея, как он сам писал, возникла у него 5 октября 1659 г. Работая над ней, Гюйгенс написал одно из самых важных своих произведений, а именно — трактат «О центробежной силе».

Введение в эту книгу начинается словами: тяжесть есть стремление (*conatus*) опускаться вниз. Термин *conatus* для механика XVII в. означал движение, которое готово совершиться, но почему-то еще не совершается. Лейбниц сравнивал отношение *conatus* к совершившемуся движению с отношением точки к линии, началом которой она служит. Когда тяжесть подвешена на нити, то она натягивает нить вследствие того, что тяжелое тело стремится двигаться по направлению нити равноускоренным движением известного вида.

В движении по наклонной плоскости *conatus* во столько же раз меньше *conatus*'а по вертикали, во сколько раз расстояние по наклонной плоскости, проходимое в одно и то же время, меньше расстояния в движении по вертикали. Для числового определения *conatus*'а нужно рассматривать движение только в самом начале, взявши сколь угодно малый промежуток времени.

Основная идея Гюйгенса состоит в том, что силу надо измерять не сообщенной ею скоростью в равномерном движении, а тем ускоренным движением, которое получается под ее влиянием, т. е. действие силы измеряется сообщаемым ей ускорением; (во времена Гюйгенса термин «ускорение» еще не существовал, он появился только в первой половине XIX в.). По Гюйгенсу, действие силы определяется движением, в котором пройденные пути пропорциональны квадрату времени.

После этого Гюйгенс переходит к определению величины центробежной силы (рис. 33). Посмотрим, какое и какой величины стремление удалиться от центра имеется у тел, прикрепленных к вращающейся нити или колесу. Пусть колесо  $BG$  вращается в горизонтальной плоскости вокруг центра  $A$ ; если к его окружности привязан шарик, то он, придя в точку  $B$ , стремится двигаться по прямой  $BH$ , касательной в точке  $B$  к колесу. Здесь с первого взгляда трудно представить, по какой же причине натягивается нить  $AB$ , если шарик стремится двигаться по прямой  $BH$ , перпендикулярной к направлению нити  $AB$ .

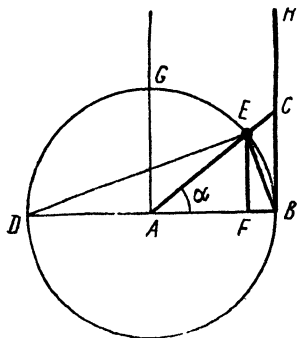


Рис. 33

Дальнейшие рассуждения можно привести уже в современной терминологии. Пусть окружная скорость шарика  $v$ , и за бесконечно малое время  $t$  радиус  $AB$  повернется на угол  $\alpha$ , а оторвавшийся шарик, двигаясь прямолинейно, пройдет отрезок  $BC = vt$ . Перемещение шарика относительно колеса  $BG$  по радиусу равно  $EC = s$ . Ввиду малости  $\alpha$  можно считать, что  $EC$  равно своей проекции  $FB$  на радиус  $AB$ . Соединив  $E$  с концами  $B$  и  $D$  диаметра, получим прямоугольный треугольник  $BED$ , в котором

$$BE^2 = BF \cdot BD = s \cdot 2R,$$

где  $R$  — радиус колеса.

Так как  $BE \simeq BC = vt$ , то

$$s = \frac{v^2}{2R} t^2;$$

получено равноускоренное движение с ускорением  $v^2/R$ .

Гюйгенс вычисление заканчивает утверждением, что это стремление совершенно подобно тому, которое ощущается, когда шарик удерживается подвешенным на нити, так как и в этом случае он тоже стремится уйти равноускоренным движением по направлению самой нити.

Гюйгенс определяет также траекторию относительного движения шарика  $C$ . Ее можем легко получить, применив принцип Коперника: сообщим одновременно колесу  $BG$  и прямой  $BH$  вращение колеса в противоположную сторону; тогда колесо остановится,

а прямая  $BH$  будет перекашиваться по нему без скольжения, причем точка  $C$  удаляется по этой прямой с постоянной скоростью  $v$ , иными словами, расстояние  $CB$  возрастает пропорционально углу поворота.

Траектория, описанная точкой  $C$ , является эвольвентой окружности. Так создалась теория эвольвент, которая была позже специально рассмотрена Гюйгенсом в одном из отделов его «*Horologium oscillatorium*» (в русском переводе «Маятниковые часы»).

Гюйгенс считает, что описанное стремление совершенно подобно тому, с каким подвешенные на нити тяжелые тела стремятся двигаться вниз. Отсюда получаем, что центробежные силы неравных тел, движущихся с одинаковой скоростью по равным кругам, относятся между собой как тяжести движущихся тел или их массы (*quantitates solidae* — количества твердого вещества).

Гюйгенс показал, что определенный им *conatus*, по существу, принадлежит к тому же классу, что и сила тяжести. Отсюда в дальнейшем получается некоторое колебание в терминологии: иногда употребляют *conatus centrifugus* (центробежное стремление), иногда же *vis centrifuga* (центробежная сила).

Центробежная сила, растягивающая нить, с современной точки зрения представляет не что иное, как приложенную к связям реальную силу инерции.

Подобно тому как подвешенный на нити груз уравнивает реальную силой ее натяжения, так и вращающийся в горизонтальной плоскости прикрепленный к нити груз подвержен действию некоторой центростремительной силы. Следовательно, инерционное у Аристотеля круговое равномерное движение производится некоторой силой, т. е. оказывается движением насильственным; это второй и окончательный удар по аристотелевой динамике, которая затем сменится динамикой Ньютона (первый удар был нанесен Галилеем).

Если равноускоренное движение по закону  $s = (at^2)/2$  заменить современным термином «движение с ускорением  $a$ », то получим формулировку второго закона Ньютона: сила пропорциональна массе тела и сообщаемому ею этому телу ускорению.

Наконец, Гюйгенс рассматривал случай относительного движения. Сила инерции, отсутствующая для шарика в неподвижной системе отсчета, оказалась реальной в переносной системе отсчета — колесе  $BG$ . Это обстоятельство тоже было известно Гюйгенсу, так как он учитывал влияние вращения Земли на период колебаний маятника на различных широтах, т. е. знал, что ускорение силы тяжести  $g$  изменяется с широтой.

Таким образом, первый и второй законы Ньютона уже были известны Гюйгенсу. Остается неизвестным, знал ли он третий закон. Возможно, что он имел о нем некоторое представление, но во всяком случае он его не формулировал. Но даже и первых двух законов вполне достаточно для изложения динамики свободной материальной точки.

Первые четыре предложения остальной части рассматриваемой книги в современном обозначении сводятся к выводу формулы для центробежной силы:

$$F = (mv^2)/R.$$

В пятом предложении решается задача: если тело движется по окружности со скоростью, получающейся при падении с высоты, равной четверти диаметра, то это тело имеет центробежное стремление, равное своей тяжести.

Гюйгенс пытался определить, в каком отношении время наименьшего колебания маятника находится со временем падения по вертикальной прямой с высоты, соответствующей маятнику. Это дало возможность сделать открытия относительно циклоиды.

В успешном решении этой задачи Гюйгенсу помогла счастливая случайность. За полтора года до рассматриваемого времени, в июне 1658 г., Гюйгенсу прислали из Франции сделанный неизвестным лицом вызов решить некоторые задачи. Этим неизвестным лицом был великий французский писатель и математик *Блэз Паскаль* (1623—1662), а предложенные задачи касались циклоиды. Через любую точку циклоиды параллельно ее основанию проводилась прямая до ее пересечения с осью циклоиды. Требовалось найти площадь и центр тяжести фигуры, заключенной между кривой, проведенной прямой и отрезком оси, а также объемы и центры тяжести тел вращения полученного сегмента вокруг его прямолинейных сторон и, наконец, центры тяжести половинок этих тел вращения, полученных в результате пересечения их плоскостью, проведенной через ось циклоиды.

Гюйгенс тоже принимал участие в решении этих задач и удостоился похвального отзыва Паскаля, который вместе с окончательным решением задачи дал и обзор присланных ему решений. В дальнейшем Гюйгенс продолжал заниматься циклоидой и, в частности, указал некоторые свойства касательной к циклоиде, которые ему пригодились впоследствии.

Исследуя свойства предполагаемой кривой, по которой должны были совершаться изохронные колебания, он нашел, что этим свойствам вполне удовлетворяет циклоида. Одновременно ему удалось определить и полный период малых колебаний математического маятника, получив известную формулу

$$T = 2\pi \sqrt{l/g},$$

где  $l$  — длина маятника,  $g$  — ускорение силы тяжести, или, по Гюйгенсу, коэффициент пропорциональности в формуле, определяющей закон падения тяжелого тела без начальной скорости.

Сконструированный им циклоидальный маятник представлял собой тяжелый груз, подвешенный на нити, который колебался между двумя пластинками  $AB$  и  $AC$  (рис. 34). Форму их он сначала определял опытным путем, а затем уста-

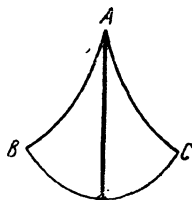


Рис. 34

новил, что эти пластинки должны быть изогнуты по циклоиде, так как эвольвента циклоиды является тоже циклоидой.

С 1660 г. начинаются поездки Гюйгенса в Париж, а затем в Лондон, где он познакомился с членами английского Королевского общества. В это время производилась дальнейшая работа по усовершенствованию конструкции маятника. Так как реальный маятник имеет форму чечевицы значительных размеров, а его стержень не является невесомым, то надо было решить задачу о периоде колебаний физического маятника.

Наиболее простым решением этой задачи было такое: рассматриваемый физический маятник надо заменить математическим с той же точкой привеса и с одинаковым периодом колебания. Если длину такого маятника отложить от точки привеса по оси физического маятника (по проведенному из центра его тяжести перпендикуляру к оси привеса), то конечная точка отложенного отрезка получает название центра качания; в нем как бы сосредоточивается вся масса физического маятника.

Эта задача ставилась перед Гюйгенсом еще в ранний период, но в несколько отличной форме, а именно в определении так называемого центра удара. Вопрос стоял так: будет ли удар мечом более действенным, если он произведен местом, находящимся около острия, или же какой-нибудь другой точкой, местом около центра тяжести либо даже вблизи рукоятки?

Решение итальянского механика Бальди (1553—1617), поставившего этот вопрос, было таким: нужно ударять местом около центра тяжести. Мерсенн, написавши об этом Гюйгенсу, считал, что центр удара должен совпадать с центром качания подвешенных тел, и по совету Декарта определял его опытным путем, находя такую длину нити с подвешенным грузом, при которой ее колебания с грузом совершались бы в одинаковое время с колебаниями подвешенного плоского тела. На письме Мерсенна, написанном в 1646 г., Гюйгенс сделал пометку: «Я нашел это правило в 1664 году».

Решение этой задачи Гюйгенс получил на основании установленного им закона сохранения механической энергии, т. е. с применением интеграла живых сил.

В формулу приведенной длины  $l$  физического маятника входит момент инерции  $J$  относительно оси привеса:

$$l = J/Ma,$$

где  $Ma$  — произведение массы фигуры на расстояние от ее центра тяжести до оси привеса (статический момент).

Если маятник представлял однородную плоскую фигуру, колеблющуюся около оси, перпендикулярной к плоскости фигуры, то Гюйгенс считал массы всех составляющих ее точек равными единице; приведенная длина выражалась формулой

$$l = \frac{Oa^2 + Ob^2 + \dots}{Oa + Ob + \dots},$$

где  $Oa, Ob, \dots$  — расстояния этих точек до оси привеса.

Если рассматриваемая фигура была плоской и ось привеса находилась в этой плоскости, то для решения задачи надо было построить на этой плоскости цилиндр, основанием которого была рассматриваемая фигура, расцезь его плоскостью, проходящей через ось вращения под углом в  $45^\circ$  с плоскостью фигуры, и искать центр тяжести полученного усеченного цилиндра, или, как его называл Гюйгенс, «копытца». После нахождения этого центра тяжести центр качания получался в основании перпендикуляра, опущенного из него на плоскость заданной фигуры.

Таким методом Гюйгенс определял центр качания различных фигур и тел, подвешенных различным образом, и, что всего труднее, шара, подвешенного на нити. Так как все внимание Гюйгенса сосредоточивалось на определении центра качания, то понятие о моменте инерции от него ускользнуло и осталось только окончательное правило — известное построение Гюйгенса для определения центра качания на прямой, проходящей через центр тяжести и точку привеса.

Результаты своих исследований Гюйгенс опубликовал в книге «Часы с маятником», вышедшей в свет в 1673 г. Кроме описания часов, в эту книгу вошла теория циклоидального маятника, учение об эволютах и эвольвентах и общие методы определения центра качания. В конце книги Гюйгенс поместил без доказательств теоремы, касающиеся центробежной силы; по-видимому, он не считал этот вопрос разработанным до конца. Эти теоремы не были включены в составленный Гюйгенсом список произведений, которые он завещал опубликовать после его смерти; однако эта книга была опубликована. Но даже и в составе «Часов с маятником» она сыграла очень большую роль в дальнейшем развитии физико-математических наук. Так как в ней была впервые установлена величина центростремительного ускорения, то Ньютон получил возможность определить силы, с которыми Солнце действует на окружающие его планеты. Эта работа Гюйгенса, а также три закона Кеплера составили основу, на которой Ньютон создал свою классическую динамику.

## ИСААК НЬЮТОН. ТРИ ЗАКОНА ДВИЖЕНИЯ

В 70-х годах XVII в. на горизонте западноевропейской науки появляется еще одно яркое светило — *Исаак Ньютон* (1643—1727), которому удалось в разработке классической механики сделать больше, чем оба его великих предшественника, взятые вместе. Жизнь его значительно беднее событиями, чем у Гюйгенса, который был членом Парижской Академии наук и провел в Париже много времени — от 1666 до 1681 г., впервые посетил Англию в 1661 г. и был деятельным членом Королевского общества вплоть до 1678 г.

Ньютон родился в Англии, в графстве Линкольн, получил образование в Кембридже и начиная с 1688 г. был связан с Лондоном; с 1695 г., он был назначен хранителем Монетного двора. Жизнь его



*И. Ньютон (1643—1727)*

протекала спокойно, мирно и однообразно; умер он ненасытым, никуда не выезжал за пределы Англии. Путешествия его ограничивались небольшими расстояниями от Грэнтэма, где он учился в начальной школе, до Кембриджа, где он получил высшее образование, и Лондона (около 200 км). Ньютон отличался редким здоровьем, никогда не имел особенно близких друзей-ровесников; чисто «житейская» биография Ньютона почти ограничивается послужным списком, да десятком анекдотов-легенд.

С 1661 по 1669 г. Ньютон учился в Кембридже, в 1669 г. он занял место профессора математики, заменив своего учителя Барроу;

в 1672 г. был избран в члены Королевского общества. В 1664—1667 гг. он, опасаясь чумы, уехал на свою родину в деревню Вулсторп и в эти 2—3 года создал математический анализ, новую оптику и основанную на принципе всемирного тяготения новую планетную систему. Дальнейшая жизнь Ньютона была лишь разработкой идей, сложившихся у него в тиши деревенского уединения.

В 1672 г. вышла из печати книга «Оптика» с изложением ньютоновой теории цветов; весь конец 1672 г. и первую половину 1673 г. он ведет дискуссию с Гюйгенсом, интересную в том отношении, что в ней выявляется противоположность характеров научного мышления двух великих людей. Не оспаривая ценности опытов Ньютона, Гюйгенс видел очень большую трудность в том, как при помощи механических теорий физики объяснить различие цветов.

В письме от 14 января 1673 г. к секретарю Королевского общества Ольденбургу Гюйгенс писал:

«Мне кажется, что самое серьезное возражение... заключается в том, действительно ли существуют более чем два цвета. Что касается меня, то я уверен, что единственная гипотеза, объясняющая механически и из природы движения желтый и синий цвета, будет достаточной и для всех других... Точно так же я не вижу, почему мистер Ньютон не удовлетворится двумя цветами; ведь было бы гораздо легче найти какую-нибудь гипотезу, которая объяснила бы из свойств движения различия этих двух цветов, чем искать причины такого разнообразия для других цветов».

На это Ньютон (тоже в письме к Ольденбургу) возражал:

«Рассматривать, каким образом можно объяснить цвета при помощи гипотез, не входит в мои планы. Я никогда не намеревался показать, в чем заключает-

ся физическая сущность цветов и их различий; мне нужно было только показать, что цвета фактически являются первоначальными и неизменными свойствами лучей, их имеющих. Я предоставляю другим механическими гипотезами объяснять природу и различия этих качеств, что, как я думаю, будет делом нетрудным».

В это время Ньютон получил от Гюйгенса экземпляр «Часов с маятником» и написал (3 июля 1673 г.) Ольденбургу письмо, предназначавшееся для передачи Гюйгенсу:

«Я с большим удовольствием смотрел эту книгу и нашел, что она полна весьма изящных и полезных рассуждений, вполне достойных их автора. Я рад, что мы должны ждать появления еще одного трактата «О центробежной силе», рассуждения которого могут оказаться очень полезными для философии природы, астрономии и механики».

Ньютон затем критикует взгляды Гюйгенса на природу цветов; если белый цвет состоит только из двух цветов, то его можно и разложить только на два цвета.

Ньютон сделал окончательное резюме своей теории цветов, из которой достаточно привести лишь один тезис:

«Различными цветами я называю не только наиболее обычные, как, например, желтый, зеленый, синий, коричневый, но и все другие мельчайшие градации, совершенно так же, как и в музыке существуют не только наиболее обычные тона, но различными звуками называются и все наименьшие градации».

Как близок был Ньютон к тому, чтобы определить, в чем заключается физическая сущность различных цветов (длина волны или период соответствующего колебания)!

Интересно, что в дальнейшем Гюйгенс начал заниматься общей теорией гармонических колебаний; разработку этой теории он до конца не довел, и конечно, не опубликовал. Вероятно, к этому и к следующему году относятся занятия Гюйгенса теорией музыки, результаты которых тоже не были опубликованы.

Конец 70-х годов XVII в. Гюйгенс посвятил работе над микроскопом, с которым он познакомился во время пребывания в Голландии у основателя микроскопии Левенгука (1632—1723); он построил свой микроскоп, который произвел фурор во Франции. Кроме того, он занимался и разработкой своей волновой теории света, в частности недавно открытого двойного лучепреломления света в кристаллах исландского шпата. В результате его работ появился «Трактат о свете», написанный по-французски и, как обычно у Гюйгенса, вышедший с большим запозданием — в 1690 г. Для механики эта работа имеет значение, как первый пример исследования движений в сплошной среде.

Гюйгенс рассматривал свет прежде всего как движение. Нельзя сомневаться, что свет представляет движение некоторой материи. На это указывают разрушение тел в фокусе зажигательного стекла и действующие на нерв зрительные впечатления, обусловленные тем, что между ним и светящимся телом находится некоторая материя. Световые колебания объясняются упругостью частичек эфира, которые не должны иметь сферической формы, но обязательно должны быть одинаковыми; в противном случае по законам теории Удара испытывающие удар частички не могли бы остановиться, а получали бы движение вперед или назад.

Гюйгенс вспоминает известный из теории удара факт, что, когда шарик налетает с некоторой скоростью на другой покоящийся, обладающий одинаковой с ним массой, то он останавливается, а ударенный получает скорость ударившего шарика. Затем он указывал, что два шарика могут обмениваться своими скоростями даже и в том случае, когда они непосредственно не соприкасаются, а именно через посредство промежуточных шариков. Этот взаимный обмен скоростями объяснял, по Гюйгенсу, возможность одновременного распространения через одну и ту же область нескольких различных световых лучей.

После этого он сформулировал знаменитый принцип: при испускании световых волн следует иметь в виду, что каждая частичка материи, в которой распространяется волна, должна сообщать свое движение не только ближайшей частичке, находящейся на одной прямой с первой частичкой и источником света; она также необходимо сообщает его всем частичкам, которые соприкасаются с ней и препятствуют ее движению. Таким образом, необходимо, чтобы вокруг каждой частички зарождалась волна, центр которой был в этой частичке.

На основании этого принципа Гюйгенс объяснил, как происходит отражение и преломление света. Так как Гюйгенсу уже было известно открытие Ремером величины скорости света, то для объяснения преломления света он принял, что в телах свет распространяется с меньшей скоростью, чем в эфире. Двойное лучепреломление Гюйгенс объяснил тем, что при вступлении в кристалл исландского шпата луч распадается на два луча. Для одного из таких лучей соблюдаются законы обычного преломления (ординарный луч), для других же (экстраординарный луч) они не соблюдаются. Гюйгенс пришел к заключению, что также существовали две различные эманации световых волн. Одну из них он видел в наблюдающемся в этом камне правильном преломлении, предполагая, что для этой эманации волны имеют обычную сферическую форму. Что касается другой эманации, которая должна была произвести неправильное преломление, то он пытался определить, что могут произвести эллиптические или сфероидальные волны.

Для таких сфероидальных волн (в виде эллипсоида вращения) скорость распространения света в кристалле не является одинаковой во всех направлениях.

И в этом отношении Ньютон оказался на противоположных позициях с Гюйгенсом. Его теория предполагала, что свет распространяется в виде мельчайших частиц, свободно рассеивающихся как в пустом пространстве, так и в материальных телах, в которых скорость распространения света больше, чем в пустом пространстве. Дискуссии по этому вопросу, по существу, не было, так как после опубликования «Трактата о свете» Гюйгенс жил всего лишь пять лет.

Благодаря колоссальному авторитету Ньютона в XVIII в. наибольшим успехом пользовалась его корпускулярная теория света; но в XIX в. было установлено, что скорость света в телах меньше

скорости света в пустоте, и победа оказалась на стороне Гюйгенса.

В настоящее время взгляды обоих великих ученых оказались правильными — световой фотон является одновременно и частицей и волной.

В 1686 г. вышло в свет одно из самых выдающихся произведений мировой научной литературы — первое издание книги Ньютона «Математические начала натуральной философии». Целью этого произведения было создание вполне разработанной системы Вселенной, основанной на законе всемирного тяготения. В нем Ньютон дал решение задачи, которая мучила европейский, и не только европейский, мир.

Строение Солнечной системы и законы движения планет изложены в третьей книге сочинения, озаглавленной «О системе мира», первые же две книги посвящены непосредственно теоретической механике. Эти книги имеют «Введение», которое представляет тем больший интерес, что в нем излагаются основы ньютоновской механики.

Это «Введение» распадается на две части: в первой даются определения основных понятий, во второй устанавливаются законы движения. Первое определение читается так: количество материи измеряется в совокупности ее плотностью и объемом, т. е. их произведением.

Это количество материи он называет массой и указывает, что она является известной, если дан вес тела. А что масса пропорциональна весу тела, он нашел при помощи очень точно поставленных опытов с маятником.

Разгадка этого определения заключается в том, что Ньютону нужно было указать разницу между весом, рассматриваемым как сила, и массой. До Ньютона вес применялся только в статике как сила, движущая или сопротивляющаяся, т. е. как векторная величина. В динамике же вес тела играет совершенно другую роль — он используется как скалярная величина, входящая в определение количества движения. Плотность сейчас является производной величиной и измеряется частным от деления массы на объем; в XVII в. первоначальной величиной была плотность (удельный вес), правила определения которой были известны со времен Архимеда, тогда как понятие «масса» было новым.

Затем Ньютон определил количество движения (*motus*); оно измеряется скоростью и количеством материи в совокупности, т. е. их произведением.

Интересно третье определение: материя обладает возможностью сопротивления; поэтому каждое тело, поскольку оно ею обладает, стремится оставаться в состоянии покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Эта сила постоянно пропорциональна массе тела и от инерции материи отличается только способом рассмотрения. Инерция материи производит то, что каждое тело только с трудом может быть выведено из своего состояния покоя или движения; поэтому эту присущую материи силу (*vis insita*) можно назвать силой инерции.

Эта сила инерции «дожила» до времени Эйлера, поскольку в течение всего XVIII в. понятие о силе было весьма неопределенным; применяли термины «живая сила», «лошадиная сила», «жизненная сила», «усыпительная сила» и т. д. Точное определение понятия силы выработалось только к началу XIX в., хотя уже Д'Аламбер подозревал, что эта «сила инерции» все же не совсем сила.

Настоящая сила (в современном смысле) появляется только в четвертом определении: приложенная сила (*vis impressa*) есть действующее на некоторое тело стремление изменить его состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения.

Затем Ньютон дает определение центральной силе, для которой характерным является центр действия силы. К числу таких сил относятся тяжесть, магнитная сила, всемирное тяготение, а также сила, противодействующая той, с которой вращающийся на веревке камень стремится оторваться от нее.

Величина центростремительной силы бывает тройкого рода: абсолютная, ускоряющая и движущая. Абсолютной величиной центростремительной силы является большая или меньшая мера ее, зависящая от действующей причины, исходящей из центра, и распространяющаяся к окружающим частям. Ускоряющая величина центростремительной силы пропорциональна той скорости, которую она порождает в заданное время. Движущая величина центростремительной силы пропорциональна движению, которое она порождает в заданное время.

Ньютон применил соответствующие определения только к центральным силам, но их можно было выразить и в более общей форме. Составим уравнение

$$F = \frac{d(mv)}{dt}.$$

В этом уравнении  $F$  представляет собой то, что Ньютон называет абсолютной силой;  $\frac{d(mv)}{dt}$  — изменение количества движения в единицу времени, которое он назвал движущей силой, а  $\frac{dv}{dt} = \frac{F}{m}$  — ускоряющей силой.

Понятие ускоряющей силы Ньютон получил исходя из того факта, что все тяжелые тела падают с одним и тем же ускорением  $g$ . Он писал о том, что вблизи земной поверхности, где ускоряющая сила, т. е. сила тяжести, во всех телах одна и та же, движущие силы тяжести, или веса, относятся как массы. Если же подняться в области, где ускоряющая сила тяжести меньше, то в такой же мере уменьшится и вес, который всегда пропорционален произведению ускоряющей силы тяжести на массу тела.

Как видно, Ньютон был близок к современному определению силы как произведения массы на ускорение; его удержало лишь введенное им понятие об ускоряющей силе, которую А. Н. Крылов назвал, несколько модернизируя, напряжением силы тяжести.

В течение всего XVIII в. ускоряющая сила  $F/m$  заслонила по-

нятие ускорения; даже через сто лет после Ньютона Лагранж в своей «Аналитической механике» называет  $d^2x/dt^2$  ускоряющей силой по оси  $Ox$ .

Ньютон дал также определение абсолютного и относительного пространства и времени, а также установил различия между абсолютным и относительным движениями. Он указал, что действующие силы сами по себе еще не могут определить, будет ли данное движение относительным или нет. Каждое относительное движение может поэтому изменяться, в то время как истинное остается неизменным.

Проявления, которыми различаются абсолютное и относительное движения, состоят в силах стремления от оси вращательного движения, ибо в чисто относительном вращательном движении эти силы равны нулю, в истинном же и абсолютном они больше или меньше, сообразно количеству движения.

Если на длинной нити подвесить сосуд и, вращая его, закрутить нить, пока она не станет совсем жесткой, затем наполнить сосуд водой и, удержав сперва вместе с водой в покое, пустить, то под действием появляющейся силы сосуд начнет вращаться, и это вращение поддерживается достаточно долго раскручиванием нити. Сперва поверхность воды остается плоской, как было до движения сосуда. Затем сосуд силой, постепенно действующей на воду, заставляет и ее участвовать в своем вращении.

По мере возрастания вращении вода постепенно отступает от середины сосуда и возвышается по его краям, принимая впалую форму поверхности; при усиливающемся движении она все более и более поднимается к краям, пока не станет обращаться в одинаковое время с сосудом и придет по отношению к сосуду в относительный покой. Этот подъем воды указывает на стремление ее частиц удалиться от оси вращения, и по этому стремлению обнаруживается и измеряется истинное и абсолютное вращательное движение воды, которое, как видно, во всем совершенно противоположно относительному движению.

В начале, когда относительное движение воды в сосуде наибольшее, оно совершенно не вызывает стремления удалиться от оси — вода не стремится к окружности и не повышается у стенок сосуда, а ее поверхность остается плоской и ее истинное вращательное движение еще не начинается. Затем, когда относительное движение уменьшается, повышение воды у стенок сосуда обнаруживает ее стремление удалиться от оси, и это стремление показывает постепенно возрастающее истинное вращательное движение, и когда оно становится наибольшим, то вода устанавливается в покое относительно сосуда.

Таким образом, это стремление не зависит от движения воды относительно окружающего тела; следовательно, по таким движениям нельзя определить истинного вращательного движения тела. Истинное круговое движение какого-либо тела может быть лишь одно в полном соответствии с силой стремления его от оси; относительных же движений в зависимости от того, к чему они относятся

ся, тело может иметь бесконечное множество; но независимо от этих отношений такие движения совершенно не сопровождаются истинными проявлениями, если только это тело не обладает, кроме этих относительных также и упомянутым единственным истинным движением.

После определения понятий Ньютон в книге «Математические начала натуральной философии» изложил следующие аксиомы, или законы, движения:

1. *Все тела упорствуют в своем состоянии покоя или равномерного прямолинейного движения, пока не будут принуждены приложенными силами изменить свое состояние.*

2. *Изменение движения пропорционально приложенной движущей силе и совершается по прямой линии, по которой прилагается эта сила.*

3. *Действию всегда соответствует противоположное и равное противодействие, или взаимодействия двух тел между собой всегда равны и направлены в противоположные стороны.*

По существу, два первых закона были уже сформулированы Ньютоном выше; второй закон для центростремительных сил был дан Ньютоном в гораздо более конкретной и близкой к современной форме. Формулировка второго закона, в которую входит понятие о количестве движения, очень близка к той, которую мог бы дать Декарт, если бы ввел понятие о силе, векторный характер которой был ему неизвестен.

Понятие о центростремительной силе было тесно связано с вопросом о тяготении, который рассматривался в течение всего XVII в. Декарт объяснял существующую на земной поверхности тяжесть окружающим Землю вихрем, отбрасывающим к ее центру тела, находящиеся на ее поверхности. Он не только не признавал тяготения между небесными телами, но даже допускал мысль, что птицы, летящие очень высоко над поверхностью Земли, могут выйти из сферы действия тяжести, и ставил вопрос, вернется ли на Землю ядро, выпущенное вертикально из пушки.

В 1669 г. во Французской Академии происходила дискуссия о причинах тяготения; некоторые из выступавших допускали действие на расстоянии, но все же наилучшим был признан доклад Гюйгенса, отвергавшего действие на расстоянии. В 1690 г., когда Гюйгенс уже познакомился с книгой Ньютона «Математические начала натуральной философии», он писал о том, что он не согласен с принципом, который Ньютон кладет в основу своих вычислений; что все малые частицы взаимно притягиваются и стремятся сблизиться. Гюйгенс убежден, что причина такого притяжения не может быть объяснена при помощи какого-нибудь механического принципа или закона движения.

Он не был против «центростремительной силы», при помощи которой Ньютон заставляет планеты тяготеть к Солнцу, а Луну к Земле. Существование такого рода притяжения, или импульса в природе доказывается не только опытом, но и может быть объяснено на основании законов движения (теория вихрей Декарта).

Когда-то Гюйгенс предполагал, что сферическая форма Солнца может произойти от действия той же самой причины, которая вызывает сферичность Земли, но не распространял действия тяжести на такие расстояния, как от Солнца до планет или от Земли до Луны. Точно так же Гюйгенс не думал о закономерном уменьшении тяготения, обратно пропорциональном квадратам расстояний.

Допущение такого тяготения к Солнцу, убывающего в указанной пропорции, производит настолько хорошее уравнивание центробежных сил планет, что получается то самое эллиптическое движение, которое Кеплер угадал и подтвердил своими наблюдениями; поэтому нельзя сомневаться в правильности упомянутых выше гипотез относительно тяготения, а также и в правильности системы Ньютона в той мере, как она на них основывается. Это тем более должно казаться справедливым, что она дает решение многих трудностей, которые не могли быть преодолены при помощи вихрей, предполагаемых Декартом.

Гюйгенс принял всю математическую часть астрономической системы Ньютона, сделав только оговорку относительно действия на расстояния. Но из этого не следует, что он согласился с обоснованием его механической системы, иными словами, с его тремя законами движения, или, точнее, с первым законом.

Он был твердо убежден, что всякое движение совершается относительно какого-либо материального тела и что абсолютное пространство не может быть принято в качестве системы отсчета. Если считать нелепым, чтобы оно находилось в движении, то неужели из этого должно следовать, что оно обязательно является неподвижным.

По отношению к абсолютному пространству понятия о покое и движении неприменимы. Равным образом, об изолированном теле в пространстве, где не имеется никаких других действующих на него тел, нельзя утверждать, будет ли оно двигаться или находиться в покое, поскольку не существует никаких других материальных тел, которые могли бы служить в качестве системы отсчета.

Невозможно определить абсолютность равномерного прямолинейного движения, но относительно вращения, или кругового движения, Ньютон, как показано выше, держался другого мнения. Такого мнения долго придерживался и Гюйгенс, определявший влияние центробежной силы на величину ускорения силы тяжести на различных широтах и также приписывавший сплюснутость Земли именно развивающимся при ее вращении центробежным силам. Однако под конец жизни он изменил это мнение.

Эксперимент, на который ссылался Ньютон, есть описанный выше опыт с вращающимся сосудом, наполненным водой. Эрнст Мах в «Очерках по истории механики» указал, что причиной поднятия воды у стенок сосуда является все же относительное движение воды по отношению к совокупности неподвижных звезд и что совершенно неизвестно, какие явления наблюдались бы, если бы ведро с водой было неподвижным, а вокруг него вращалась вся совокупность неподвижных звезд.

Всей силы своего замечания Мах не представлял, но через несколько десятков лет это место его книги попало на глаза гениального мыслителя Альберта Эйнштейна и было для него толчком к созданию общей теории относительности.

Невозможность признания первого закона Ньютона, по-видимому, и была для Гюйгенса причиной, по которой он не смог создать полной системы механики. Хотя известно теперь, что в данном вопросе прав Гюйгенс, а не Ньютон, но все же «гениальная ограниченность» Ньютона позволила ему создать систему механики, на которой основаны почти все технические достижения двух столетий.

Некоторые недоразумения были и со вторым законом.

В настоящее время нет никакого сомнения, что под *motus* (движение) Ньютон понимал «количество движения»; произведенный выше анализ его определений «величин» центростремительной силы показывает, что он понимал это со всей ясностью. Но для его современников понятие о векторной величине было неизвестно, и его *motus* можно было понимать и иначе. Возникла целая школа механиков, которые считали, что *motus* надо понимать не как  $mv$ , а как  $mv^2$ ; в возникшей дискуссии принял участие Вольтер, который содействовал распространению ньютонианизма во Франции. Дело осложнилось тем, что когда на основании указанных двух вполне различных принципов решалась конкретная задача, то при правильном решении результаты получались одинаковыми. Такое положение продолжалось до середины XVIII в., когда Д'Аламбер показал, что в данном случае, по существу, обе стороны по своему правы, но и та и другая не вполне.

Для нас все дело заключается в следующем: количество движения есть векторная величина, живая сила — скалярная. Если речь идет о прямолинейных движениях, с которых большей частью и начинали механики XVIII в., то количество движения можно понимать и как алгебраическую величину. Затем, когда речь идет об «изменении» какой-либо величины, то необходимо указать независимую переменную, по отношению к которой отсчитываются изменения. Для выражения количества движения такой переменной является время и, как показано выше, Ньютон это хорошо знал:

$$F = \frac{d(mv)}{dt}.$$

Для кинетической энергии независимой является координата  $x$  в прямолинейном движении

$$F = m \frac{dv}{dt} = m \frac{dv}{dx} \frac{dx}{dt} = mv \frac{dv}{dx} = \frac{d}{dx} \left( \frac{mv^2}{2} \right).$$

Оба полученных равенства вполне справедливы; каждое из них имеет свою область применения.

Теперь проследим, каким образом Ньютон применял свои принципы на практике. Первой задачей, которую он решил, была следующая: зная законы движения планет, определить силу, которая производит их движение. В настоящее время известно, что Ньютон

решил задачу на основании созданного им анализа бесконечно малых; но ее решение он записал обычным в то время геометрическим методом. Сейчас решение этой задачи можно произвести при помощи анализа бесконечно малых.

Законы движения планет, как известно, были даны Кеплером. Первых два закона утверждают, что планеты движутся по эллипсам, в одном из фокусов которых находится Солнце, и что радиус-векторы планет, имеющие начало в Солнце, описывают площади пропорционально времени, т. е. с постоянной секторной скоростью.

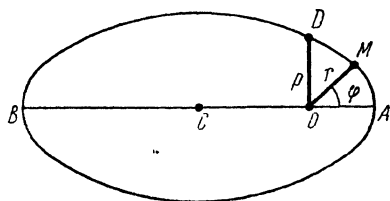


Рис. 35

Так как планеты движутся вечно и не встречают заметного сопротивления, то наиболее естественно предположить, что движущая сила не изменяется в зависимости от времени и не зависит от скорости движения планет.

Пусть  $AB$  — большая ось эллипса, по которому движется планета (рис. 35),  $C$  — его центр,  $O$  — фокус,  $OD = p$  — параметр (перпендикуляр, восставленный в фокусе к большой оси),  $e$  — эксцентриситет. Положение планеты  $M$  определим в полярных координатах радиусом-вектором  $r$  и полярным углом  $\varphi$ .

Если угол  $\varphi$  отсчитывается от оси  $OA$  по направлению движения планеты, то уравнение эллипса в полярных координатах имеет вид

$$r = \frac{p}{1 + e \cos \varphi}. \quad (1)$$

Условие постоянства секторной скорости выразится уравнением

$$r^2 \frac{d\varphi}{dt} = C, \quad (2)$$

где  $C$  — постоянная площадей. Постоянство секторной скорости относительно  $O$  означает, что действующая на планету  $M$  сила является центральной, проходящей через фокус  $O$ ; ускорение планеты сводится только к радиальному:

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2. \quad (3)$$

Дифференцируя уравнение (1), получаем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \frac{d\varphi}{dt}.$$

Определив  $\frac{d\varphi}{dt}$  из уравнения (2), после подстановки получаем

$$\frac{dr}{dt} = \frac{pe \sin \varphi}{(1 + e \cos \varphi)^2} \frac{C}{r^2} = \frac{C}{p} e \sin \varphi.$$

Вторая производная имеет вид

$$\frac{d^2 r}{dt^2} = \frac{C}{p} e \cos \varphi \frac{d\varphi}{dt} = \frac{C^2}{p} \frac{e \cos \varphi}{r^2}.$$

Выражение для ускорения  $a_r$  принимает вид

$$a_r = \frac{d^2 r}{dt^2} - r \left( \frac{d\varphi}{dt} \right)^2 = \frac{C^2}{p} \frac{e \cos \varphi}{r^2} - \frac{C^2}{r^2} = \frac{C^2}{r^2} \left( \frac{e \cos \varphi}{p} - \frac{1}{r} \right).$$

Подставив сюда  $r$  из (1), получаем

$$a_r = \frac{C^2}{r^2} \left( \frac{e \cos \varphi}{p} - \frac{1 + e \cos \varphi}{p} \right) = - \frac{C^2}{pr^2}.$$

Если масса планеты равна  $m$ , то действующая на нее сила

$$F = ma_r = - \frac{mC^2}{pr^2}. \quad (4)$$

Знак минус показывает, что эта сила направлена к центру и имеет величину, обратно пропорциональную квадрату расстояний от планеты до Солнца.

Используем теперь третий закон Кеплера: квадраты времен обращения планет вокруг Солнца пропорциональны кубам средних расстояний, или, точнее, больших полуосей орбит планет.

Величина  $C$  представляет удвоенную секторную скорость. Если  $a$  и  $b$  — большие и малые полуоси эллипса, то его площадь равна  $\pi ab$ . Секторную скорость планеты получим, разделив эту величину на время  $T$  полного обращения; таким образом,  $C = \frac{2\pi ab}{T}$ .

Как известно из аналитической геометрии, параметр  $p$  равняется  $\frac{b^2}{a}$ .

Таким образом,

$$\frac{C^2}{p} = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{T^2} \frac{a}{b^2} = \frac{4\pi^2 a^3}{T^2}.$$

Согласно третьему закону Кеплера отношение  $\frac{a^3}{T^2} = K$  для всех планет постоянно и не зависит от их масс. Тогда

$$F = - \frac{mC^2}{p} \frac{1}{r^2} = - 4\pi^2 K \frac{m}{r^2}. \quad (5)$$

Таким образом, сила притяжения каждой планеты Солнцем пропорциональна ее массе. Но по третьему закону Ньютона сила, с которой планета притягивает Солнце, должна, с одной стороны, быть пропорциональна массе Солнца, а с другой — определяться равенством (5). Если  $M$  — масса Солнца, то

$$\frac{F}{M} = - \frac{4\pi^2 K}{M} \frac{m}{r^2}.$$

Так как масса Солнца — одна и та же для всех планет, то выражение  $\frac{4\pi^2 K}{M}$  является постоянной величиной. Обозначив ее

μ, получим

$$F = - \mu \frac{Mm}{r^2},$$

что выражает закон всемирного тяготения.

Название книги Ньютона «Математические начала натуральной философии» кажется на первый взгляд необычным. В XVII в. ученые уже освоили классическую мудрость, где слово «философия», которое переводилось на русский язык словом «любомудрие». Греческие философы от Фалеса до Аристотеля подразумевали под философией совокупность всех знаний о природе и человеке; в нее входили как составные части логика и физика, которая кроме физико-математических наук включала и биологические, а также этику и эстетику. Из трех книг, составляющих «Математические начала натуральной философии», основной была последняя, третья книга «О системе мира». Сам Ньютон писал об этом так: «Я составил об этом предмете третью книгу, придерживаясь популярного изложения, так чтобы она читалась многими. Но затем, чтобы те, кто, недостаточно поняв начальные положения, а потому совершенно не уяснив и силы их следствий и не отбросив привычные им в продолжение многих лет предрассудки, не вовлек бы дело в пререкания, я переложил сущность этой книги в ряд предложений по математическому обычаю, так чтобы они читались лишь теми, кто сперва овладел началами»\*.

Третья книга начинается следующими правилами философствования (*Regulae philosophandi*):

1. Не следует принимать в природе иных причин сверх тех, которые истинны и достаточны для объяснения явлений.

2. Поэтому, насколько возможно, необходимо приписывать те же причины того же рода проявлениям природы.

3. Такие свойства, которые не могут быть ни усилены, ни ослаблены и которые оказываются присущими всем телам, над которыми возможно производить испытания, должны быть почитаемы за свойства всех тел вообще.

Такими свойствами Ньютон считал протяженность, твердость (по крайней мере атомов), непроницаемость, подвижность и инерцию. Даже тяжесть он не считал общим свойством, поскольку она подвержена увеличению или уменьшению с расстоянием.

4. В опытной физике предположения, выведенные из совершающихся явлений путем индукции, несмотря на возможность противных им предположений, должны быть почитаемы за верные или в точности, или приближенно, пока не обнаружатся такие явления, которыми они еще более уточнятся или же окажутся подверженными исключениям.

После этого Ньютон выписал ряд астрономических данных, на основании которых он строил свою систему мира при помощи математических принципов.

---

\* Введение к третьей книге «Математические начала натуральной философии» (в переводе А. Н. Крылова, стр. 448).

Вся первая книга представляет шедевр строго логического мышления; на основании содержащихся в ней определений и аксиом можно построить всю механику абсолютно твердых тел.

Назначение второй книги было несколько иным. Ньютону нужно было не только утвердить свою систему, но и опровергнуть своего соперника Декарта, объяснявшего движение планет вокруг Солнца при помощи вихрей жидкой среды, заполняющей космическое пространство; центрами этих вихрей были Солнце, звезды, планеты и даже их спутники. Эта система предполагала множественность миров, каждому из которых соответствовал вихрь, образующийся вокруг центрального тела.

Для опровержения теории Декарта надо было разобраться в теории движения жидкостей и твердых тел, движущихся в сопротивляющейся среде.

Но эта книга, являющаяся первым трудом в области гидродинамики, уже не построена так логично, как предыдущая: она не содержит ни специальных определений, ни аксиом; с чисто полемической точки зрения Ньютону это не представлялось необходимым. Так как космическое пространство, которое Ньютон считал пустым, а Декарт — заполненным, находящимся в вихревом движении веществом, должно представлять сопротивление движущимся в нем телам, то траектории планет должны иметь вид спиралей, закручивающихся вокруг центрального тела — Солнца. Рассматривая движение в жидкости цилиндрических тел, Ньютон даже допустил ошибку, которая была указана только в XIX в. Стоксом\*.

## КОНЕЦ ВЕЛИКОГО ВЕКА

В исторической жизни человечества бывают сравнительно короткие периоды, в течение которых происходят резкие, количественные и качественные перемены в общественной и культурной жизни. Таким периодом был VI век до н. э., когда в Вавилоне было положено начало вычислительной планетной астрономии, а в Греции появилась философия, основанная не на религиозных представлениях, а на свободном логическом мышлении.

Таким же веком был и XVII век н. э., в начале которого еще сильно чувствовались религиозные представления со стороны как католиков, так и протестантов, над мышлением довели церковные и схоластические авторитеты и даже образованные люди находились под сильным влиянием мистических учений: платонизма, астрологии, алхимии и т. д. В течение XVII в. книжные словопрепления сменились экспериментами в лабораториях, расширился горизонт географических знаний.

Успехи новой науки ясно видны из развития механики, сделавшейся в это время основным стержнем научных представлений об окружающем внешнем мире. Источником научного познания стали наблюдение и опыт, появились исследовательские лаборатории.

\* См. в переводе А. Н. Крылова замечание к предложению 51 9-го отдела книги II.

В начале XVII в. математическая мысль еще во многих отношениях развивалась на почве геометрических представлений античной эпохи: властителями дум были Архимед и Аполлоний Пергский. Работы Архимеда заложили основы интегрального исчисления, которое первоначально у Галилея и его учеников имело форму метода неделимых и было сильно продвинуто Паскалем; важную роль сыграла, в частности, уже упоминавшаяся выше задача о циклоиде.

Для развития второго отдела математического анализа, а именно дифференциального исчисления, в работах Архимеда было значительно меньше материалов: для решения вопроса о проведении касательной к кривой имелась только книга «О спиралях», которая была переведена учителем Ньютона Исааком Барроу и возможно послужила толчком к построению так называемого дифференциального треугольника.

С другой стороны, аналитическая геометрия Декарта и Ферма естественно клонила математиков к алгебраическим методам решения. Можно указать ряд авторов, работавших в этом направлении: это был бельгиец Рене-Франсуа Слюз — друг Гюйгенса, один из великих людей, незаслуженно забытых потомством. До самого недавнего времени он был известен историкам математики как изобретатель некоторых интересных кривых («слезки» или «жемчужины» Слюза). Недавно было открыто его оставшееся ненапечатанным сочинение о проведении касательных к кривым, содержащее полную теорию дифференцирования алгебраических функций; почти несомненно, что рукопись этого сочинения была в руках Лейбница. Следует назвать и самого Гюйгенса, написавшего для великого пенсионария Яна-де Витта целый трактат на ту же тему. Однако основная работа в деле создания математического анализа выпала на долю Ньютона и Лейбница.

В настоящее время можно считать доказанным, что новый анализ в форме так называемой теории флюксий был разработан Ньютоном в процессе написания книги «Математические начала натуральной философии». Хотя эта книга изложена им в обычной для XVII в. геометрической форме, но это несомненно было сделано для того, чтобы новое содержание в старой форме стало приемлемым для читателей; во всяком случае эта книга представляет последнее большое сочинение по механике, написанное в геометрической форме.

Деятельность Лейбница в области создания дифференциального исчисления можно проследить по его переписке с Гюйгенсом. Работы Лейбница в этом направлении начались несколько позже ньютоновых, а именно в 70-х годах XVII в. В это время он нашел правило для построения касательной к заданной кривой, которое бесконечно далеко превосходит известные способы. Гюйгенс попросил у него пример и Лейбниц послал ему следующую задачу.

Дана кривая, для которой сумма обратных величин расстояний от ее точек до четырех заданных точек, лежащих на одной прямой, равна обратному значению длины некоторой заданной прямой  $G$  (рис. 36).

Если положить  $EA = s_1$ ,  $EB = s_2$ ,  $EC = s_3$ ,  $ED = s_4$ , то свойства этой кривой можно выразить уравнением

$$1/s_1 + 1/s_2 + 1/s_3 + 1/s_4 = 1/G.$$

Лейбниц указал и ответ, дав отношение ординаты  $EF$  любой точки этой кривой к отрезку  $TF$ , образуемому искомой касательной  $ET$  на оси абсцисс. Полное решение этой задачи было опубликовано Лейбницем в его основной работе по дифференциальному

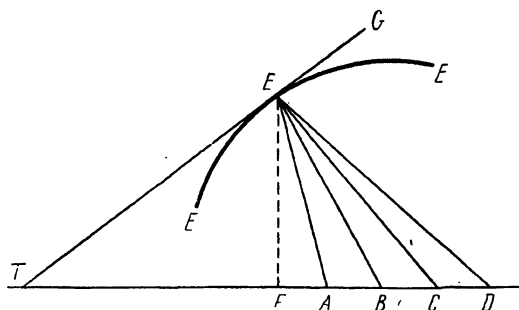


Рис. 36

исчислению «Новый метод для нахождения максимумов и минимумов, а также касательных», напечатанной в «Acta Eruditorum» за 1684 г.

Выше описаны достижения, полученные в теоретической механике в результате работ трех замечательных ученых — Галилея, Гюйгенса и Ньютона. Отметим, что, несмотря на всю разность социальных положений и национальных особенностей всех трех людей, в их деятельности есть общие черты: все трое занимались астрономией, работали в области оптики, добились крупных результатов в механике и все трое интересовались математикой.

Сравним теперь творческие характеристики и личную жизнь этих ученых. Галилей — человек среднего сословия (по положению) в ту эпоху, когда оно только начинало набирать свои силы. Он стремится познать все до конца; природа представляется для него совсем несложной; он иногда упрощает свои теоретические построения до такой степени, что не обращает внимания на получающиеся отсюда неточности. Хорошо знакомый с Кеплером и его теорией эллиптического движения планет, он все же ни одним словом не упоминает ее в своих сочинениях: его планетная система по своей простоте стоит на уровне Аристарха Самосского, признававшего равномерные круговые движения планет вокруг Солнца.

Галилей очень ценил математику (известны его слова, что «великая книга природы написана языком геометрических фигур»), но все же предпочитал пользоваться ею только тогда, когда иначе было уже невозможно поступить. В его сочинениях можно найти большое количество неверных представлений и даже прямых оши-

бок, но все их прощаешь за богатство идеи и яркость представлений о природе.

Галилей не был борцом, отстаивавшим до конца свои идеи; с религией он предпочитал не связываться, и его «Диалоги о двух системах мира» появились лишь вследствие ошибочного тактического расчета. Однако темперамент Галилея в его научных спорах был настолько энергичным, что его противники оказывались побежденными.

Галилей имел целую плеяду учеников и последователей, которые оставили после себя яркие (хотя и недолговечные) следы во время той мрачной феодальной реакции, которая сменила в XVII в. в Италии блестящую эпоху Возрождения.

Полную противоположность Галилею представляет Ньютон. В своей жизни, а также и научной деятельности он, видимо, был самым одиноким человеком нового времени; для него (по крайней мере, в течение творческого периода его жизни) существовала только его наука и больше ничего. Хорошо известно его знаменитое «*Hypotheses non fingo*» («Я не придумываю гипотез»); достаточно признать, что факт существует, и сделать из него необходимые математические выводы. Ньютон во всем шел до конца: когда для его теории строения Солнечной системы понадобилась новая математика, он изобретает высший анализ; когда потребовались усовершенствованные телескопы, он создает новую оптику. Этим он отличается от Галилея и Гюйгенса.

Галилей был исключительно статичен: не получается — можно подождать; недаром самое важное его произведение было закончено в конце его жизни.

Что касается Гюйгенса, то он, наоборот, не довел до конца и даже не дописал большинства своих произведений; даже основная тема его жизни — создание хронометра, пригодного для морских путешествий, — была решена только после его смерти — правда, на основании его принципов. В этом отношении кроме его необычной требовательности ему мешала и обстановка, в которой протекала его жизнь в Голландии.

Позднее, когда он работал во Франции в Парижской Академии (к будущности которой, нужно сказать, он относился весьма скептически), общественные отношения, необходимость научных демонстраций высокопоставленным людям отнимали у него очень много времени.

Идущий до конца в своих научных работах, Ньютон был религиозным человеком вроде тех пуритан, которые сделали английскую революцию 40-годов XVII в. и оказались не у дел во время реставрации Стюартов, а также в период правления сменивших их Оранской и Ганноверской династий. Эта религиозность Ньютона выразилась и в его произведениях последнего периода его жизни («Толкования на Апокалипсис и на пророчества Даниила»), и даже в его строго научных произведениях.

Гюйгенс, стоящий хронологически посередине между Галилеем и Ньютоном, занимает между ними среднее место и по многим

чертам своего характера. В нем нет ни «буйной жизнерадостности» Галилея, ни сумрачного одиночества» Ньютона.

Гюйгенс как дворянин был обучен всем хорошим манерам, в том числе сдержанности и учтивости. Кроме отца и братьев — Константина и Лодевика — Гюйгенс больших друзей, по-видимому, не имел, хотя у него было громадное количество знакомых, причем близости мешало не только чувство сословного превосходства.

В семье своего отца Гюйгенс получил блестящее образование: он знал греческий, латинский, французский, итальянский, испанский и английский языки. Его переписка велась главным образом на латинском языке — с учеными — и на французском — с братьями и хорошо знакомыми; на голландском языке он писал официальные донесения Штатам, инструкции по кораблевождению и полировке стекол и письма своей сестре Сюзанне, да и то до тех пор, пока она не научилась французскому языку. Кроме того, Гюйгенс очень хорошо рисовал, великолепно знал музыку и разбирался в архитектуре и живописи. Он хорошо знал произведения классических авторов Греции и Рима, а также итальянского Возрождения и доминировавшей в его время испанской литературы (Кальдерона, Лопе де Вега); из французских авторов он ценил Корнеля, Мольера, Расина.

Дух классицизма был очень силен у Гюйгенса; может быть этим даже объясняется и то предпочтение, которое он оказывал греческой геометрии перед арабской алгеброй.

Получивший классическое образование и светски воспитанный человек, Гюйгенс занимался физическими работами, полировал оптические стекла, конструировал телескопы, микроскопы, воздушные насосы и даже планетарий по примеру Архимеда, имел дела с часовыми мастерами и прилагал все усилия, чтобы штурманы купеческих кораблей в своих путешествиях в колонии имели надежные средства для определения своего местонахождения.

Связь с практикой у Гюйгенса проявляется даже в математике. Он стремится к полной строгости своих доказательств, неоднократно их переделывает, но вместе с тем математика только для математики для него не существует.

Ньютон мог среди своих занятий уделить время чисто математическому исследованию кривых третьего порядка; для Гюйгенса подобное предприятие было совершенно невыносимым. Единственный раз он увлекся чистой математикой, когда занялся исследованиями теории игр, да и здесь на него повлияли его парижские ученые, для которых этот вопрос имел существенное значение.

В области физики Гюйгенс тоже занимает среднее место между Галилеем и Ньютоном. У Галилея гипотезы о физической природе явлений занимают много места и не все они правильны; Ньютон вообще никаких «гипотез не выдумывал»; у Гюйгенса они есть, но занимают довольно скромное место, и, если исключить его теорию тяготения, они почти все перешли в золотой фонд позднейшей физики.

То же самое можно сказать об его отношении к природе. Для Галилея она была источником наслаждения, для Ньютона — предметом изучения. Гюйгенс воспринимал природу через призму искусства или науки.

Такое же отношение характерно и для национальной литературы. Если Галилея можно считать одним из родоначальников итальянской прозы (за свои коперниканские воззрения он пострадал отчасти потому, что «Диалоги о двух важнейших системах мира» были написаны по-итальянски), то Гюйгенс меньше всего писал на родном голландском языке.

Одна черта мировоззрения Гюйгенса очень сильно выделяла его среди людей XVII в. Все три великих современника — Декарт, Галилей, Ньютон — были по-своему, один больше, другой меньше, религиозными. Про Гюйгенса этого сказать уже нельзя. Известное значение, вероятно, имело то обстоятельство, что юность Гюйгенса протекала в эпоху Тридцатилетней войны (1618—1648). Тридцатилетнюю войну называют «школой европейского вольномыслия». В этой школе молодой Гюйгенс оказался хорошим учеником. Когда в 1660 г. иезуитский математик патер Такс попытался совратить его в католицизм, то Гюйгенс написал ему, что все это далеко отстоит от очевидности геометрических доказательств.

Посмертные победы Гюйгенса — признание волновой теории света в XIX в., критика ньютоновой механики, приведшая к созданию принципа относительности в начале XX в., — оказали большое влияние на дальнейшее развитие теоретической механики. В жизни Гюйгенса были два момента, которые представляют несомненный интерес для науки начала XX в., — покорение воздушного пространства и космические полеты.

Воздухоплавание стало возможным только после создания достаточно легкого двигателя, а именно двигателя внутреннего сгорания. Первый такой двигатель был создан Гюйгенсом в 1673 г. В составленной им для Парижской Академии программе исследований стояли два пункта: «Исследовать силу, заключенную в орудийном порохе, помещая его в небольшом количестве в железный или медный ящик достаточной толщины; таким же образом исследовать силу воды, разреженной огнем». Последнюю идею, он, по-видимому, заимствовал у Паскаля, с которым говорил на эту тему в 1660 г. во время путешествия по Франции. Эта тема, приведшая к изобретению парового двигателя, была разработана Денисом Папеном, бывшим сотрудником Гюйгенса по его работе в Академии; первую же он разрешил сам, построив прибор, где при помощи взрыва пороха можно было получить силу, поднимающую груз. Он считал возможным подняться в воздух не при помощи «легкости» пустоты, а под действием силы движения, приложенного к крыльям или к чему-либо подобному.

Первый действующий по этому принципу двигатель был построен в 1867 г. (двухтактный газовый двигатель), но только вместо пороха был применен светильный газ.

Вторая точка соприкосновения Гюйгенса с современностью заключается в последнем его произведении «Cosmotheoros» («Мирозритель»), посвященном жизни на других планетах. Тема межпланетных путешествий встречалась еще в древности. Строго говоря, это была запретная тема, пожалуй, даже более опасная, чем теория Коперника. Интересно отметить, что теория Коперника на Руси не преследовалась: первое упоминание о ней находится в переводе «Селенографии» польского астронома Гевелия. В этом переводе система Коперника трактуется как равная птолемеевой.

Вопрос об обитаемости планет у Гюйгенса рассматривался с научно допустимой точки зрения относительно возможных на них физических условий. Особенно много внимания Гюйгенс уделил рассмотрению того, как могут представляться движения других планет жителям какой-либо одной из них. Самая последняя запись в его рукописи, относящаяся к концу 1694 г. или началу 1695 г., содержит вычисления наибольших элонгаций Меркурия от Солнца, наблюдаемых с различных планет, начиная от Венеры и кончая Сатурном.

В 1717 г. по указанию Петра I эта книга была переведена на русский язык.

## Часть III

# РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ В XVIII в.

---

### ОБЩИЙ ОБЗОР. РАЗВИТИЕ МЕХАНИКИ В РОССИИ В XVIII в.

Работы трех великих механиков — Галилея, Гюйгенса и Ньютона — получили свое завершение в трудах ученых XVIII в. Открытый в конце века Лейбницем и Ньютоном математический анализ достиг в трудах Эйлера и Лагранжа совершенства и занял господствующее положение в математике, так что автор «Аналитической механики» Лагранж написал свое сочинение без всяких чертежей и объявил, что механика представляет лишь одну ветвь анализа. В связи с этим интересно отметить, что наиболее распространенное название для математика XVIII в. было «геометр».

Что касается астрономии, то она по-прежнему в XVIII в. оставалась ведущей наукой, занятия которой были обязательными для любого большого математика. От рассмотрения динамики одной материальной точки астрономы перешли к вопросам динамики твердого тела и планетной системы. Были решены недоуменные вопросы о прецессии и приливах, о форме Земли, была поставлена задача о движении трех тел. «Небесная механика» Лапласа показала, что при помощи закона всемирного тяготения можно объяснить все детали движения планет Солнечной системы за исключением лишь перигелия Меркурия; для получения полного объяснения пришлось ждать теории относительности. Кроме того, Лапласом были решены и другие вопросы; было доказано, что Солнечная система является устойчивой.

В теоретической механике начиная с XVII в. появляется необычная тема. Первым Галилей поставил вопрос о форме равновесия тяжелой однородной нити; его решение было исправлено Гюйгенсом; в конце XVII в. было доказано, что истинной формой является цепная линия. В XVIII в. вместо нити изучают упругую струну; ее колебаниями занимается Даниил Бернулли; дифференциальное уравнение в частных производных для колебания струны составляет Д'Аламбер; в конце века Лагранж дает общую теорию колебаний.

Кроме того, произошло и географическое расширение культурной области; к западноевропейским странам присоединяется еще Россия.

Историю «Новой России» обычно начинают с Петра I и его ев-

ропейских путешествий. Конечно, с этого момента начинается очень интенсивное (главным образом, техническое) преобразование старорусской жизни, но тем не менее было бы ошибкой не учитывать предшествующий период — время царствования Алексея Михайловича Романова (1645—1676) и его преемников. Наиболее выдающимся событием этого царствования была русско-польская война (1654—1667), завершившаяся воссоединением Украины с Россией. Это воссоединение устранило основную причину несогласия между двумя восточными славянскими государствами и способствовало проникновению на Русь украинской и отчасти польской культуры. Это влияние обнаруживается в переезде в Москву ряда украинских деятелей (Феофана Прокоповича, Стефана Яворского), в основании Славяно-греко-латинской академии, появлении в русской поэзии польского силлабического стихосложения (Симеон Полоцкий), а в архитектуре — так называемого нарышкинского барокко (церкви в Филях, в Дубровицах и др.).

Конец XVII в. характеризуется усилением польского влияния, при дворе появляются польские костюмы, переводятся произведения польских ученых («Селенография» Гевелия) и старшие дети царя получают классическое образование по польскому образцу.

Польско-украинское влияние не прошло незамеченным в русском обществе: оно вызвало жестокую реакцию против «новшеств»; это был раскол. Борьба между старой и новой церквями кончилась победой новой, но это была Пиррова победа. В результате наиболее реакционные слои русского общества ушли с политической сцены в подполье, а победившая «государственная» церковь потеряла большую часть своего авторитета, так как всем было ясно, что победила не новая церковь, а государство, и уничтожение патриархии при Петре I прошло совершенно спокойно. Это падение авторитета русской церкви, управляемой «святým духом», но в генеральском мундире, создало очень благоприятную почву для развития русской науки, когда польско-украинское влияние сменилось немецко-голландским.

В России в 1725 г. была открыта Петербургская Академия наук. В числе приглашенных академиков были сыновья Ивана Бернулли Николай и Даниил, а также принадлежавший к кругу Бернулли профессор Яков Германн; двумя годами позже в Петербург приехал и Л. Эйлер.

Он приехал в Россию в двадцатилетнем возрасте и Академия наук, как он сам заявлял, была настоящей его наставницей в науке. Его научная философия изложена им в «Письмах к одной немецкой принцессе», написанных около 1762 г. в Берлине по заказу Фридриха II. В России впервые они были опубликованы в Петербурге в трех томах (1768—1772) и неоднократно издавались в переводах на русский язык.

Эта философия имеет много общего с ломоносовской: оба не верили в действие на расстоянии, оба отвергали ньютоновскую теорию истечения света. Это тем более важно, что оба великих человека хотя и знали друг друга, но лично не виделись. Ломоносов при-

ехал в Петербург в тот год, когда Эйлер уехал в Берлин, а когда Эйлер вернулся в Петербург, то Ломоносов уже умер; одинаковость их философских воззрений может быть объяснена только одинаковостью той почвы, на которой они выросли. Если сравнить философию Эйлера с существовавшими в его время воззрениями Ньютона, Лейбница и Декарта, то, пожалуй, ближе всего она к философии Декарта.

На какой почве возникли основы той общеакадемической философии, которую разделяли и Л. Эйлер и М. В. Ломоносов (1688—1768)?

В 1725 г. в Петербург приехал Жозеф Николай Делиль в качестве директора астрономической обсерватории. Он был одним из наиболее старших академиков и очень активным в работе не только по своей специальности, но и вообще в академической среде, особенно с молодыми академиками.

Во время работы в Академии (до 1747 г.) он совершил в 1740 г. путешествие в Сибирь для наблюдения прохождения Меркурия перед диском Солнца. Он много занимался работой по составлению карты; этим же занимались Ломоносов и Эйлер, научная деятельность которых выдвинула Россию в число видных стран.

## ЛЕОНАРД ЭЙЛЕР.

### РАБОТЫ ПЕРВОГО ПЕТЕРБУРГСКОГО ПЕРИОДА.

#### «МЕХАНИКИ» И «МОРСКАЯ НАУКА»

*Леонард Эйлер* (1707—1783) родился в Базеле (Швейцария), где и получил высшее образование; его учителями в области математики были Иван Бернулли и Яков Германн, оба продолжавшие в математике линию Лейбница. Первоначально Эйлер приглашался в Петербургскую Академию наук в качестве сотрудника по медико-физиологической части (он даже написал работу о движении крови в жилах), но вскоре после приезда он занял должность адъюнкта по кафедре высшей математики. Конечно, чистой математикой работа Эйлера не ограничивалась; можно даже сказать, что в первом петербургском периоде деятельности Эйлера механика занимала одно из важнейших мест.

Издатель его произведений по механике П. Штекель подсчитал, что из 28 статей, напечатанных в мемуарах Петербургской Академии наук за 1727—1734 гг., девять непосредственно относятся к механике, а одиннадцать работ тесно связаны с решением механических задач. Из этих работ вырос план большого курса механики, изложенной общим аналитическим методом.

Согласно этому плану предполагалось написать три части: механику точки, механику твердого тела и механику жидкостей. Первая часть — «Механика, или учение о движении в аналитическом изложении» была закончена в 1732 г. и вышла в двух больших томах несколько позднее в Петербурге. Вторая часть — «Теория движения тел твердых или жидких» была закончена значительно позже и напечатана в 1765 г. в Берлине; вместо третьей части — механики



Л. Эйлер (1707—1783)

жидких тел — имеется лишь четыре обширные работы, напечатанные в мемуарах Петербургской Академии наук в течение 1769—1772 гг.

К механике относятся также «Морская наука» («Scientia Navalis»), работы по высшей баллистике и ряд трактатов, посвященных небесной механике: «Теория движения Луны», «Теория движения планет и комет» и др. По математике он написал «Арифметику для начальных училищ», «Алгебру», по образцу которой писались русские учебники для среднего образования вплоть до начала XX в., «Введение в анализ», «Дифференциальное исчисление» и «Интеграль-

ное исчисление». Из четырех наук — астрономии, оптики, математики и механики, которыми занимались ученые XVII в., — даже оптика не осталась вне круга ведения Эйлера; более того, на этой почве он «дал сражение» великому Ньютону и остался победителем.

Дело в том, что в оптике Ньютона хроматическая аберрация считалась неустранимой. Как показывают недавние исследования Н. И. Невской, Эйлер в самый начальный период своей работы в Петербурге обратил внимание на то, что глаз высших животных и человека обладает ахроматизмом, а если так, то вполне возможно построить ахроматическую систему линз. Однако авторитет Ньютона был столь высок, что на первые работы Эйлера никто не обратил внимания, и только позже в своей переписке с Доллондом он указал принципы, на основании которых тот построил первую ахроматическую систему линз.

«Механику», или науку о движении, изложенную аналитически, вышедшую в 1736 г., Л. Эйлер посвятил динамике точки. Это сочинение Лагранж квалифицировал как «первое большое произведение», в котором анализ был применен к науке о движении. В предисловии к этому сочинению Эйлер писал:

«Если анализ где-либо и необходим, так это особенно относится к механике. Хотя читатель и убеждается в истине выставленных предложений, но он не получает достаточно ясного и точного их понимания, так что, если чуть-чуть изменить те же самые вопросы, он едва ли будет в состоянии разрешить их самостоятельно, если не прибегнет к анализу и те же предложения не разрешит аналитическим методом. Это как раз случилось со мной, когда я начал знакомиться с На-

чалами» Ньютона и «Форономией» Германна; хотя мне казалось, что я достаточно ясно понял решение многих задач, однако задач, чуть отступающих от них, я уже решить не мог. И вот тогда-то я попытался, насколько умел, выделить анализ из этого синтетического метода и те же предложения для собственной пользы проработать аналитически; благодаря этому я значительно лучше понял суть вопроса. Затем таким же образом я исследовал и другие работы, относящиеся к этой науке, разбросанные по многим местам, и лично для себя я изложил их плановым и однообразным методом и привел в удобный порядок. При этих занятиях я не только встретился с целым рядом вопросов, ранее совершенно не разрешенных, которые я удачно разрешил, но и нашел много новых методов, благодаря которым не только механика, но и самый анализ, по-видимому, в значительной степени обогатился» \*.

Аналитический склад ума Эйлера был причиной того, что наименьшее внимание он обратил на ту часть механики, которая в его время уже получила свое оформление и разрабатывалась чисто геометрическим методом, а именно — на статику. Больших работ, посвященных этой дисциплине, Эйлер так и не написал; только в недавнее время в швейцарском Полном собрании сочинений Эйлера напечатан впервые его труд, посвященный статике, но он ни по объему, ни по содержанию не может быть поставлен в один ряд с классическими произведениями Эйлера, посвященными динамике.

В дальнейшем Эйлер ввел понятие о материальной точке: «Движение тел конечной величины не может быть объяснено, пока не будет тщательно исследовано движение тела, имеющего конечную величину, не определив сначала, какое движение имеет каждая его маленькая частичка или точка». Эту материальную точку Эйлер понимал не как геометрическую: эти точки могут быть и больше, и меньше, находиться друг с другом в определенном отношении, даже могут разделяться на части, которые следует считать «равными между собой, но не в том смысле, что они равно малы, а в том, что на них одна и та же сила производит равное действие» («Механика», § 139).

Исследованием движения материальной точки Эйлер занимался не только в «Механике», изданной в 1736 г.; он посвятил этой теме также шесть первых глав «Теории движения твердых тел», вышедшей в 1765 г.; таким образом, можно проследить эволюцию идей Эйлера за 30 лет.

Основными понятиями динамики у него, по существу, являются ньютоновы, но в деталях можно найти довольно большие отличия. Он различает абсолютное и относительное пространство; абсолютное он представляет по Ньютону как бесконечно большое пустое пространство, в котором находятся рассматриваемые тела. В связи с этим он различает абсолютное и относительное движения; термина «переносное движение» у него еще нет, так как теория движения твердого тела еще находилась в состоянии создания.

В «Теории движения твердых тел» он утверждает (§ 79), что если бы существовало одно-единственное тело, то пришлось бы считать, что оно либо находится в покое, либо движется, так как нельзя предположить, чтобы одновременно было и то и другое или

---

\* Основы динамики точки. М., ГТТИ, 1938, стр. 33.

чтобы не было ни того, ни другого. Отсюда можно сделать вывод, что движение и покой не представляют собой чего-либо чисто идеального, возникающего только из сравнения, так что в самих телах не заключается ничего соответствующего им.

Вместе с тем Эйлер отмечает, что отыскание тела, находящегося в абсолютном покое, представляет большие трудности. Он подчеркивает («Теория движения», § 102), что для определения относительного движения недостаточно принять в качестве неподвижной одну-единственную точку (например, центр Солнца или центр тяжести Солнечной системы), так как с помощью одной точки можно определить лишь расстояние, но не направление; для этого необходимо иметь три или даже четыре неподвижные точки. В качестве таких неподвижных точек в мировом пространстве обыкновенно принимаются неподвижные звезды. Если правильно предположение о неподвижности звезд, то все тела, которые по отношению к ним находятся в покое или движении, сохраняли бы в силу инерции это свое состояние. Однако и у самих звезд замечены небольшие неправильности\*, которые следует принимать во внимание при подобного рода суждениях.

Затем Эйлер определяет равномерное движение точки. В «Механике» утверждается, что скорость измеряется тем расстоянием, которое тело, двигаясь равномерно, проходит в данное время (§ 21). В «Теории движения» Эйлер указывает (§ 31), что скорость измеряется частным от деления пути на время. Сейчас это представляется само собой очевидным, но в античной математике можно было рассматривать отношения только значений одной и той же величины, а влияние Евклида в XVIII в. было еще очень большим.

Можно считать, что только Эйлер начал утверждать, что скорость становится уже не качеством, а самостоятельной величиной, как длина или площадь.

Однако в математике Эйлер шел не по пути Ньютона с производными, а скорее следовал Лейбницу с его бесконечно малыми: при каком угодно неравномерном движении можно допустить, что самые маленькие элементы пути проходятся равномерным движением («Механика», § 33).

После определения равномерного движения Эйлер детально разбирает закон инерции; здесь он настолько строго следует Ньютону, что даже определяет силу инерции. Сила инерции — это присущая всем телам (вложенная во все тела) способность или пребывать в покое, или же равномерно продолжать движение по прямому направлению («Механика», № 74).

Однако в «Предисловии» к «Механике» Эйлер отмечает, что причине этого сохранения состояния не очень удачно дано имя силы, так как она неоднородна с другими так называемыми силами, как, например, сила тяжести, и не может с ними сравниваться. Это, однако, не мешает ему утверждать («Механика», § 142), что сила инерции каждого тела пропорциональна количеству материи, из которой оно состоит.

\* Открытие Эдмундом Галлеем (1656—1742) собственного движения Арктур<sup>a</sup>.

От таких представлений он избавился только во время работы над теорией движения твердых тел, в которой он писал: иногда пользуются выражением «сила инерции», так как сила есть нечто противодействующее изменению состояния. Но если под силой понимать какую-то причину, изменяющую состояние тела, то здесь ее нужно понимать совсем не в этом смысле: проявление инерции в высшей степени отлично от того, которое свойственно обычным силам. Поэтому для избежания какой-либо путаницы слово «сила» не будем употреблять и будем рассматриваемое свойство тел называть инерцией.

Отметим, что это уже было сделано в 1743 г. Д'Аламбером.

Для обозначения силы в собственном смысле Эйлер пользуется в «Механике» двумя терминами: Лейбницевым «*potentia*», восходящим еще к Аристотелю, и Ньютоновым «*vis*». Термин Ньютона, однако, он употребляет чаще, а в «Теории движения твердых тел» даже исключительно. Переход от первого термина ко второму виден даже в определении силы, которое дается в «Механике» (§ 99). Сила (*potentia*) есть то усилие (*vis*), которое переводит тело из состояния покоя в состояние движения или видоизменяет это движение. Направлением силы он называет прямую, по которой она стремится двигать тело («Механика», § 103).

Что касается величины силы, то в «Механике» указано, что сравнение и измерение различных сил надо заимствовать из статики, где исследуются только те случаи, в которых несколько сил взаимно уничтожаются, тело же, на которое они действуют, остается в покое. В механике надо объяснить, каким образом действующая на тело силы вызывают движение в теле, находившемся в состоянии покоя, а в теле движущемся изменяют движение.

Это, очевидно, следует понимать так: в статике без понятия равнодействующей можно обойтись — оно является необходимым только в динамике. И все же закона параллелограмма сил Эйлер не формулирует. Если на точку действует несколько сил, то она получает от них то же движение (*motus*), как если бы на нее действовала одна-единственная сила, эквивалентная им всем («Механика», § 107). Иными словами, в динамике складываются не силы, а количества движения, производимые этими силами.

Возможно, что в это время Эйлер ознакомился с опубликованной в 1728 г. в «Комментариях» Петербургской Академии работой Даниила Бернулли (1700—1782) «Исследование принципов механики и геометрическое доказательство сложения и разложения сил». Это была критика Вариньонова доказательства закона параллелограмма сил в его «Новой механике», где основной закон выводится путем сложения по правилу параллелограмма тех двух движений, которые эти силы, действуя порознь, сообщают точке их приложения.

Д. Бернулли писал, что не может согласиться с двумя предположениями Вариньона, а именно что величина силы пропорциональна величине скорости, сообщаемой ею телу, и что сообщаемые телу отдельными силами движения независимы между собой. Считая,

что понятие силы является основным для всей механики, Д. Бернулли дал независимое от сложения движений чисто геометрическое доказательство параллелограмма сил.

Эйлер в «Механике» (§ 125) раскрывает содержание второго закона Ньютона. Он показывает, что действие силы на тело является двояким; сила изменяет величину скорости, а также и ее направление; затем это сообщаемое силой приращение скорости пропорционально времени ее действия; соответствующие промежутки времени естественно предполагаются настолько малыми, что сила не успевает заметно изменить «величину» точки или ее массу: чтобы сообщить большей точке ту же скорость, что и меньшей, нужна большая сила, и при этом во столько раз, во сколько одна точка больше другой.

Показано, что массу тела нужно выводить из его веса и количество материи принимается пропорциональным его весу. В пустоте все тела падают одинаково, поэтому все они благодаря силе тяжести ускоряются одинаковым образом. Отсюда следует, что сила тяжести, действующая на отдельные тела, пропорциональна их количеству материи. Вес же тела указывает силу тяжести, которая на это тело действует. Так как она пропорциональна количеству материи, то при помощи взвешивания можно узнать это количество материи в том смысле, который придается материи («Механика», § 141).

В «Теории движения твердых тел» это замечание развертывается в целую главу XV «Об абсолютных мерах, выведенных из падения тел». В ней устанавливаются пять видов величин, определяющих полностью всякое движение: пройденный путь, время, скорость, сила и масса. Однако, понимая все различия между силой и массой, способы их измерения Эйлер устанавливает, по существу, одинаковые. Действующие силы всегда выражаем через равные им веса. Массу того или иного тела выражаем через вес, какой оно имело бы вблизи Земли.

Подобное измерение основывается на том, что веса тел пропорциональны их массам, в силу чего можно считать, что вес каждого тела дает точную меру его массы.

Подобным путем как силы, так и массы сводятся к однородным величинам. Частное от деления какой-либо силы на массу всегда выражается отвлеченным числом.

Не следует считать, что это отношение будет хотя бы численно равняться ускорению  $g$ . Высота, проходимая в течение одной секунды свободно падающим телом, обозначена также  $g$ . Эта высота естественно должна измеряться в единицах длины. Во времена Эйлера, как видно, учение о размерностях находилось в самом зачатке.

Рассмотрим теперь, как Эйлер делал вывод основных дифференциальных уравнений движения. Сначала показывается («Механика», § 147), что расстояния, на которые одинаковые точки передвигаются какими-либо силами в равные промежутки времени, пропорциональны этим силам. Затем выводится формула, которую можно

принять за выраженную в дифференциальной форме теорему количеств движений («Механика», § 150): приращение скорости, которое получит точка за время  $dt$  прохождения отрезка  $ds$ , пропорционально произведению действующей силы  $F$  на промежуток времени  $dt$ .

Если коэффициент пропорциональности обозначить  $k$ , то получим формулу

$$dv = kFdt.$$

Отсюда, поскольку  $dt = \frac{ds}{v}$ , получается равенство, представляющее в элементарной форме теорему кинетической энергии

$$v dv = kF ds.$$

Величина  $Fds$  представляет собой то, что сейчас называют в случае прямолинейного движения элементарной работой.

Комбинируя все предшествующие результаты, вводя массу  $m$  и полагая коэффициент пропорциональности равным единице, получаем:

$$dv = \frac{F}{m} dt.$$

Получена форма дифференциального уравнения прямолинейного движения точки.

В случае криволинейного движения действующая сила раскладывается на две составляющие:  $T$  — по направлению касательной и  $N$  — по направлению нормали. Если  $\rho$  — радиус кривизны траектории, то дифференциальные уравнения криволинейного движения точки примут вид:

$$dv = \frac{T}{m} dt, \quad \rho = \frac{mv^2}{N}.$$

Получены так называемые естественные уравнения движения.

В 1742 г. вышел в свет «Трактат о флюксиях» Коллина Маклорена — профессора Эдинбургского университета и непосредственного продолжателя идей Ньютона. В этой работе он воспользовался предложенным еще Валлисом разложением силы по трем взаимно перпендикулярным направлениям. Эйлер употребил это для составления дифференциальных уравнений в общем случае пространственного движения материальной точки.

Если  $X, Y, Z$  — проекции силы на три взаимно перпендикулярные оси координат, то соответствующие дифференциальные уравнения движения примут вид

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{X}{m}, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = \frac{Y}{m}, \quad \frac{d^2z}{dt^2} = \frac{Z}{m}.$$

Отметим, что о третьем законе Ньютона Эйлер не упоминает; это совершенно естественно, так как для определения движения одной материальной точки он является излишним. Третий закон Ньютона существенно необходим для изучения движения механической системы тел.

Рассмотрим теперь математическую сторону работы Эйлера в области решения механических задач. В 1734 г. в «Механике» он делил силы на абсолютные и относительные. Абсолютными названы силы, которые в равной мере действуют как на движущиеся, так и на находящиеся в покое тела; относительными — те силы, которые иначе действуют на тело, находящееся в покое, чем на тело движущееся.

Иными словами, абсолютные и относительные силы отличаются друг от друга тем, что величина и направление абсолютной силы зависит только от массы тела, на которое она действует; величина же и направление относительной силы зависят, кроме того, от скорости тела, на которое она действует.

В 1765 г. во вводных главах «Теории движения твердых тел» Эйлер отказался от такого деления. Теперь абсолютным являются силы, зависящие только от положения точки, а относительными — те силы, которые изображаются некоторыми функциями скорости.

В третьей главе «Механика» Эйлер решал задачи на интегрирование уравнения прямолинейного движения точки под действием сил, зависящих лишь от расстояния  $x$  от начала координат; естественно, что эти задачи решаются при помощи интеграла живых сил.

В четвертой главе Эйлер занялся рассмотрением прямолинейного движения точки в среде, сопротивление которой пропорционально первой, второй или вообще  $n$ -й степени скорости.

Эйлер не рассматривал случай, когда сила является функцией времени, может быть вследствие простоты решения таких задач, а может быть и вследствие того, что в его время еще не существовало механических двигателей, для которых надо было учитывать обстоятельства их разгона или торможения.

В двух последних главах первого тома «Механики» Эйлер занимался исследованием криволинейного движения материальных точек в пустоте, а также при наличии сопротивления среды.

Второй том «Механики» посвящен несвободному движению точек; соответствующие задачи решались главным образом с применением естественных уравнений движения. Следует указать, что при определении реакций связей Эйлер рассматривал центробежную силу так же, как и Гюйгенс, а именно как реальную силу, приложенную к связям.

Следующим шагом, намеченным Эйлером, было создание динамики твердого тела. Эйлер совершенно справедливо считается основоположником этой отрасли механики, и потому естественно возникает вопрос, при каких обстоятельствах Эйлеру пришлось заняться этой задачей.

Уезжая из России в 1743 г., Эйлер взял на себя обязательство представить Академии наук труд о теории корабля. Это обязательство было им выполнено, и в 1749 г. в Петербурге вышла его двухтомная «*Scientia Navalis*» («Морская наука»).

Историю этого вопроса освещает Эйлер во вступительной статье. Около 1736 г. в Петербургскую Академию наук было прислано

сочинение некоего француза Делакруа о движении плавающих тел. Это сочинение было дано на рецензию Эйлеру, который признал его неудовлетворительным и сам начал работать над этой задачей по приказанию Академии наук. Россия, лишь очень недавно приступившая к кораблестроению, не имела того громадного эмпирического материала, который накопили западноевропейские страны, и поэтому настоятельно нуждалась в теоретической разработке этого вопроса.

Первая часть этой работы была закончена до отъезда Эйлера из Петербурга; в ней, а именно во второй главе первого тома «Морской науки», были заложены основы динамики твердого тела.

Эйлер писал, что результат наклона корабля зависит не столько от величины наклоняющей силы, сколько от момента ее по отношению к оси, вокруг которой производится наклон, или по отношению к параллельной ей оси, проходящей через центр тяжести корабля. Теорема о движении центра тяжести механической системы уже формулировалась Гюйгенсом и была вполне доказана Ньютоном.

Рассматривая движение корабля вообще, Эйлер разлагал его на поступательное движение со скоростью центра тяжести и на вращательное вокруг оси, проходящей через этот центр. Это вращательное движение Эйлер в свою очередь разлагал на два других, соответствующих продольным и поперечным колебаниям (килевая и боковая качка); для этих вращений Эйлер устанавливал дифференциальное уравнение вращательного движения и ввел понятие о моменте инерции. Он определил величины моментов инерции некоторых тел и фигур и доказал теорему о параллельных осях приблизительно тем же самым способом, какой и теперь еще приводится в учебниках механики.

Эллипсоида инерции Эйлер еще не знал, но понятие о главных центральных осях инерции и об их роли в качестве свободных осей. для которых уравниваются центробежные силы, ему уже было известно. Он пытался определить положение оси вращения под действием заданного момента и считал ее всегда перпендикулярной к плоскости вращающего момента, что, конечно, в общем случае неверно, но для главных осей, вокруг которых Эйлер рассматривал колебательное движение корабля, безусловно, правильно.

Дальнейшее развитие этих идей содержится в «Теории движения твердых тел», над которой Эйлер работал уже во время своего пребывания в Берлине (1741—1765).

## ПРИНЦИП Д'АЛАМБЕРА. ИСТОРИЯ ЕГО ВОЗНИКНОВЕНИЯ

Ни один из принципов теоретической механики не вызывал столько споров, сколько принцип Д'Аламбера. В 20-е годы текущего столетия против него выступили философы, обвинив его в антидиалектичности; по этому принципу изучение движения сводится к исследованию равновесия, тогда как, наоборот, равновесие есть частный случай движения. В 30-е годы разгорелась дискуссия ин-



Ж. Д'Аламбер (1717—1783)

женеров против механиков-теоретиков; инженеры утверждали, что силы инерции реальны, и никак не могли согласиться, что фиктивные силы могут производить реальные действия. В 40-е годы некоторые историки механики стали утверждать, что принцип Д'Аламбера совсем не принадлежит Д'Аламберу, а должен называться петербургским принципом — принципом Гермманна-Эйлера.

Рассмотрим возникновение этого принципа. Прежде всего уточним предмет спора. Термин «сила инерции» употребляется в четырех различных смыслах. В начале XVIII в. силой инерции

называлось свойство материи сохранять свое состояние покоя или равномерного и прямолинейного движения. После Эйлера такое понимание было отброшено.

В первой половине XIX в. термин «сила инерции» возродил Жан-Виктор Понселе (1788—1867); под этим термином он понимал реальную силу противодействия, которую движимое тело оказывает связям или движущим телам; эта реальная сила приложена к связям. Такими являются центробежные силы, которые ввел Гюйгенс, как силы, натягивающие веревку, прикрепленную к телу, совершающему круговое движение; в этом смысле понимал центробежную силу и Эйлер. Если, например, рабочий толкает тележку массой  $m$ , сообщая ей ускорение  $a$ , то он действует на нее силой  $ma$ ; по третьему закону Ньютона тележка оказывает реальную силу противодействия, которая приложена к толкающему ее рабочему.

Предположим теперь, что тележку толкает не один, а два рабочих; сила, действующая на тележку, по-прежнему равна  $ma$ , но теперь получаются две силы противодействия, приложенные к каждому из рабочих. Математическая сумма двух этих сил по-прежнему равна  $ma$ , но физически сложить эти силы нельзя, поскольку они приложены к двум различным телам, а потому и не могут иметь реальной равнодействующей.

Таким образом, силы инерции, определяемые Понселе, являются реальными только в случае двух взаимодействующих тел, а в общем случае не существуют как одна реальная сила. Это об-

стоятельство привело к тому, что из теоретической механики силы инерции, определяемые Понселе, были отброшены (они остались только в технической механике).

Силами инерции по Д'Аламберу теперь называют фиктивные силы, приложенные к телу, равные произведению его массы на ускорение и направленные прямо противоположно ускорению. Если бы эти силы были реальными, то, будучи добавлены к другим действующим на тело реальным силам, они их уравнивали бы. К такой точке зрения приближался и Гюйгенс, когда утверждал, что центробежные силы Ньютона уравнивают центробежные.

Термином «силы инерции» обозначают так называемые кориолисовы силы (переносная и поворотная), которые надо добавить к реальным силам, действующим на тело, чтобы определить движение тела по отношению к некоторой неинерционной системе отсчета, поскольку вся механика Ньютона применима только по отношению к абсолютно неподвижной системе отсчета, или совершающей по отношению к этой системе отсчета равномерное и прямолинейное движение.

В случае неинерционной системы отсчета необходимо добавлять кориолисовы силы, не существующие в абсолютной системе отсчета, но вполне реальные по отношению к переносной системе отсчета. К этому пониманию был близок и Гюйгенс; формулу для центробежного ускорения он выводил для относительного движения, а также учитывал влияние центробежной силы вращения Земли на величину периода колебания маятника для различных широт.

Рассмотрим силы инерции в смысле Д'Аламбера; при этом отметим, что сам Д'Аламбер этого термина не употреблял, но Лагранж в «Аналитической механике» автором рассматриваемого принципа считает Д'Аламбера. Он писал, что в появившемся в 1743 г. трактате Д'Аламбера «Динамика» был предложен прямой и общий метод, с помощью которого можно разрешить или во всяком случае выразить в виде уравнений все задачи механики, которые только можно представить.

История возникновения принципа Д'Аламбера представляется в следующем виде. Первой задачей динамики твердого тела — простейшего примера механической системы материальных точек — была решенная Гюйгенсом задача о физическом маятнике. При ее решении Гюйгенс пользовался следующими предположениями:

1. Центр тяжести системы тяжелых тел не может подняться на высоту, большую той, с которой он упал, какие бы изменения взаимного положения этих тел ни происходили, поскольку иначе было бы возможным вечное движение.

2. Физический маятник может всегда самостоятельно подняться на высоту, с которой он опустился свободным движением.

В 1681 г. против этих предположений появились возражения, на которые Гюйгенс отвечал довольно неявно и не совсем удовлетворительно. Этот спор привлек внимание Якова Бернулли

(1654—1705), который воспользовался представившимся случаем для детального рассмотрения теории Гюйгенса и попробовал получить ее из основных принципов динамики. Сначала он рассматривал только два одинаковых груза, прикрепленных к жесткому прямолинейному стержню; скорость первого груза, более близкого к точке подвеса, которую он получал, описывая дугу при колебании, была меньше той, которую он получил бы при свободном падении по той же дуге, а скорость, приобретенная при этом другим, более удаленным грузом, должна быть больше той, которую он получил бы в свободном падении по описанной дуге. Скорость, потерянная первым грузом, сообщается второму, и так как эта передача получается при помощи рычага, имеющего точку опоры в точке подвеса стержня, то величина передаваемой скорости должна удовлетворять закону равновесия сил на этом рычаге; таким образом, потеря скорости первого груза относится к скорости, приобретенной вторым грузом, обратно пропорционально плечам рычага, т. е. расстояниям от рассматриваемых грузов до точки подвеса.

В 1691 г. Яков Бернулли исправил свою гипотезу: он рассматривал совокупность движений, которые тяжесть в каждый момент сообщает телам, составляющим маятник; так как эти тела не могут совершать свои естественные движения вследствие связанности, то воспринимаемые ими движения нужно рассматривать как состоящие из сообщенных им и других, прибавленных или отнятых, которые должны сбалансироваться между собой, вследствие чего маятник должен оставаться в равновесии. Таким образом, задача приводится к принципам статики и требует только применения математического анализа.

Это было первое появление идеи о равновесии. Следующий шаг в решении той же задачи был сделан *Яковом Германном* (1678—1733). Германн, так же как и Эйлер, родился в Базеле и получил математическое образование в кругу Бернулли. Близость идей Германна к Якову Бернулли видна из одинаковости терминологии; для обозначения понятия «сила» Германн пользуется тем же термином «*sollicitatio*» — побуждение, что и Яков Бернулли. Будучи с 1713 г. профессором во Франкфурте-на-Одере, Германн там и закончил свое основное произведение «*Форономия, или о силах и движениях твердых и жидких тел*». С 1725 г. Германн — член Петербургской Академии наук, где он оставался до 1731 г. Когда Эйлер приехал в Петербург, Германн оказывал ему всяческое покровительство. Работы Германна были хорошо известны Эйлеру. Эту тесную связь Эйлера с Германном следует тем более подчеркнуть, что, выпуская в 1735 г. свою «*Механику*», Эйлер считал, что из-за недостаточности разработанных принципов еще нельзя заниматься динамикой твердого тела. Кроме того, по мнению самого Эйлера, в книге Германна не было никаких новых общих принципов механики; поэтому книга, написанная в 1726 г., никакого отношения к петербургскому периоду жизни Германна не имеет, и название «петербургский» к принципу Германна неприменимо.

Но что же в сущности было сделано Германном? В пятой главе второй части первой книги его «Форонии» Германн разбирает физический маятник, состоящий из двух материальных точек, и ставит вопрос об определении его приведенной длины. Для этой цели он вводит так называемые викарные (заменяющие) силы (*solicitationes vicariae*), определяемые им так: викарными силами для центральных сил тяготения являются тангенциальные силы, которые нужно подставить мысленно вместо центральных сил тяготения и которые будут им эквивалентны.

Если силы тяжести отложить в прямо противоположном направлении, т. е. по вертикали вверх, то они уравновесят всю систему викарных сил. После этого Германн, доказав две леммы, переходит к основной теореме, которая формулируется им так: если отдельные части какого-нибудь физического маятника, будучи внезапно освобождены от всяких связей, начнут двигаться вверх, каждая с той скоростью, которую она получила во время колебания, будучи связана с остальными точками, то общий центр тяжести всех частиц маятника поднимется на ту же самую высоту, с которой он опустился при нисхождении всего физического маятника, т. е. когда все частицы маятника были еще между собой связаны.

Эта теорема и есть то предложение, которое без доказательства было положено Гюйгенсом в основу его теории физического маятника.

В петербургский период жизни Германн еще раз вернулся к задаче о физическом маятнике и решил ее в статье «Новый способ вывода уже рассматривавшегося правила определения центра колебания любого сложного маятника, полученный из теории движения тяжелых тел по дугам окружности»\*. Данный им вывод, по существу, совпадает с обычным доказательством при помощи интеграла живых сил. Это обстоятельство является решающим для суждения о «принципе Германа»; даже сам автор не признавал его в качестве общего принципа механики. Следует отметить, что в викарных силах Германна содержится зародыш того, что теперь называют тангенциальными силами инерции.

Придуманный для решения одной только задачи принцип Германа Эйлер сделал более общим и воспользовался им для определения колебаний гибких тел в мемуаре «О малых колебаниях тел как твердых, так и гибких. Новый и легкий метод»\*\*.

Сославшись на работы своих предшественников Даниила и Ивана Бернулли, Тэйлора и Германа и на те затруднения, которые они встретили при определении колебаний гибких тел, когда предварительно приходилось определять фигуру колеблющегося тела, Эйлер пишет: «Мне пришел в голову другой чрезвычайно ясный метод, опирающийся только на принципы статики, при помощи которого я с удивительной легкостью решил не только вопросы, касающиеся колебаний упругой пластинки и подвешенной нити, но

\* См.: *Commentarii Academiae Petropolitanae*, т. III. 1728, стр. 1—12.

\*\* См.: *Commentarii Academiae Petropolitanae*, т. VII, 1740.

смог очень быстро разобрать все, что только относится к теории колебаний» \*.

Основная идея Эйлера заключается в следующем. Рассмотрим обыкновенный математический маятник длиной  $l$  и массой  $m$ , отведенный от положения равновесия на весьма малую дугу  $s$ , которую можно считать прямой линией. Тогда сила  $F$ , движущая математический маятник, выразится формулой

$$F = mg \frac{s}{l},$$

т. е. она пропорциональна отклонению  $s$  от положения равновесия, и соответствующая длина маятника

$$l = \frac{mg}{F}s.$$

Если несколько тел одновременно доходят до положения равновесия, то для них величина  $l$  должна быть одной и той же. Поэтому силы, действующие на эти тела по направлению их движений, должны находиться между собой в отношениях, составленных из отношений их масс и тех расстояний, которые они должны пройти для того, чтобы прийти в положение равновесия.

Таким образом, для всякого тела, совершающего колебания, прежде всего необходимо исследовать, каково будет положение его равновесия. Затем это тело нужно немного вывести из этого положения и исследовать, на какое расстояние оно отстоит от места, занимаемого им в положении равновесия. Сила, действующая на каждую частицу по направлению движения, должна быть пропорциональна произведению массы частицы на то расстояние, которое она должна пройти до положения равновесия.

Если же отдельные частицы колеблющегося тела в действительности подвергаются действию других сил, имеющих иные направления, то вместо этих сил нужно подставить другие, которые действуют на отдельные части тела по направлению расстояний до положения равновесия и являются пропорциональными произведениям этих расстояний на массы соответствующих частиц. Эти силы нужно выбрать такими, чтобы все они, вместе взятые, были эквивалентны тем силам, которые в действительности приложены к телу.

Так как эти родственные силы должны быть эквивалентны силам, действующим на тело, то из статики ясно, что если вместо них взять силы, равные по величине, но прямо противоположные по направлению, то тело должно быть в равновесии. Поэтому нужно определить соответствующее положение равновесия; после того, как это будет сделано, станет известным и время, в течение которого тело будет совершать отдельные колебания.

Таким образом, все исследование, касающееся колебательных движений тел, приводится к принципам статики.

\* См.: И. Н. Веселовский. Некоторые вопросы механики Л. Эйлера. «Труды Института истории естествознания и техники», т. 19. М., 1957, стр. 276—278.

При помощи этого метода Эйлер определил приведенную длину сложного маятника, состоящего из четырех масс, расположенных на жесткой невесомой прямой, а также длину любого физического маятника, затем период колебаний шарового сегмента, лежащего выпуклой стороной на горизонтальной плоскости; он решил задачу Даниила Бернулли о колебании гибкой пластинки и разобранную Тэйлором и Иваном Бернулли задачу о колебаниях струны.

Все вычисления, которые приходится производить при использовании метода Эйлера, в точности совпадают с теми, которые можно сделать, ведя расчеты по принципу Д'Аламбера (так как ускорения в гармонических колебаниях пропорциональны отклонениям  $s$  от положения равновесия и коэффициент пропорциональности представляет собой выражение Эйлера  $g/l$ ).

Однако метод Эйлера не является общим принципом динамики прежде всего потому, что, как признает сам Эйлер, он применим только к теории колебательных движений, а, кроме того, вводимые им эквивалентные силы, по существу, аналогичны обыкновенным упругим силам, действующим при колебаниях.

Этот результат был получен за три года до появления «Динамики» Д'Аламбера.

Жан ле-Рон Д'Аламбер (1717—1783) родился в Париже. Он был незаконным сыном кавалера Де-Туш и канониссы Де Тансен. Родители подкинули его у церкви Иоанна Круглого (Jean le Rond), откуда он получил свое имя. Его приняли бедные люди, в семье которых он и воспитывался. Отец признал его и оплачивал его воспитание в этой семье, а затем и в лицее. Когда он достиг совершеннолетия, то на предложение отца принять его дворянскую фамилию он ответил отказом и сохранил фамилию своих приемных родителей.

Его деятельность вместе с Дидро (1713—1784) и Вольтером (1694—1778) имеет громадное значение в истории эпохи Просвещения не только во Франции, но и вообще в Европе. Вместе с Дидро он издавал «Энциклопедию наук, искусств и ремесел», для которой написал «Вступительное рассуждение» и ряд статей в области физико-математических и философских наук. Д'Аламбер пользовался европейской известностью: его приглашал Фридрих II на должность президента Берлинской Академии наук и Екатерина II — для воспитания ее сына, но он отверг оба предложения и остался во Франции.

Д'Аламбер оставил крупный след в развитии механики созданием носящего его имя принципа, опубликованного в сочинении «Динамика», вышедшем в 1743 г. Для правильного понимания этого принципа нужно иметь в виду состояние механической терминологии его времени. Не существовало термина «ускорение», а следовательно, и термина «силы инерции». Д'Аламбер уклонился от употребления понятия «сила», не считая достаточно выясненной природу сил. Понятие «скорость» он употреблял в двух смыслах: в теории удара в современном смысле как конечную величину, а в случае сил, действующих непрерывно, — как ее бесконечно малое приращение  $dv$ . Так как принцип Д'Аламбера предполагает наличие

сил, то, конечно, для понимания его сущности необходимо как-то ввести силы. Сохраняя терминологию эпохи, это удобнее всего сделать, приняв обозначения Эйлера:

$$dv = \frac{F}{m} dt,$$

где  $F$  — сила,  $m$  — масса тела, на которое она действует.

Формулировка принципа у Д'Аламбера: дана система тел (материальных точек), связанных между собой; каждому телу сообщено определенное движение (скорость), которому это тело не может следовать по причине действия других тел, связанных в системе. Определить движение, которое должно получить каждое из этих тел.

Изложение принципа Д'Аламбера проведем с небольшими упрощениями и, конечно, в терминологии, близкой к современной.

Пусть система состоит из нескольких тел, массы которых известны. Возьмем одно из этих тел, масса которого  $m$ . Пусть на это тело действует внешняя сила  $F$ , сообщаящая ему скорость  $dv_1$ ,

$$dv_1 = \frac{F}{m} dt.$$

Эту скорость тело получит, если оно будет свободным. Но так как на него действуют силы от других тел системы, равнодействующая которых  $R$ , то рассматриваемое тело получит еще добавочное приращение  $dv_2$ :

$$dv_2 = \frac{R}{m} dt.$$

Таким образом, истинное приращение скорости этого тела

$$\overline{dv} = \overline{dv}_1 + \overline{dv}_2 = (\overline{F}/m) dt + (\overline{R}/m) dt,$$

откуда

$$m \frac{d\overline{v}}{dt} = \overline{F} + \overline{R}.$$

Составим такие выражения для всех тел системы и просуммируем их:

$$\Sigma m \frac{d\overline{v}}{dt} = \Sigma \overline{F} + \Sigma \overline{R}.$$

Рассматриваем каждую сумму отдельно как некоторую систему, не приводя ее к какой-нибудь конечной форме. Последняя сумма эквивалентна нулю, так как состоит из внутренних сил системы, которые существуют попарно и подчиняются третьему закону Ньютона. Д'Аламбер рассматривал три совокупности:

$$\Sigma d\overline{v} = \Sigma d\overline{v}_1 + \Sigma d\overline{v}_2.$$

Он утверждал, что после сообщений скоростей  $\Sigma d\overline{v}$  тела системы действительно получают только скорости  $\Sigma d\overline{v}_1$ . Так как  $\Sigma \overline{R} = 0$ , то совокупность  $\Sigma d\overline{v}_2$  должна быть равна нулю.

Теперь после очевидных упрощений получаем выражение принципа Д'Аламбера в такой форме:

$$\Sigma m \frac{d\bar{v}}{dt} = \Sigma \bar{F}.$$

Система векторов, равных произведениям масс точек на их ускорения, эквивалентна системе внешних сил, приложенных к системе (считая в том числе и реакции связей). Таким образом, принцип Д'Аламбера, по существу, представляет обобщение для системы точек второго закона Ньютона:

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F}.$$

Следует отметить, что у Д'Аламбера ход рассуждений был иной. Он рассматривал величину  $d\bar{v}_1$  как распадающуюся на две части:  $d\bar{v}$  — действительное приращение скорости данного тела и  $d\bar{v}_2$  — скорость, которую это тело сообщило другим телам системы, — поэтому его принцип можно выразить уравнением

$$\Sigma d\bar{v}_1 = \Sigma d\bar{v} + \Sigma d\bar{v}_2.$$

В переводе на силы это равенство получит вид

$$\Sigma \bar{F} = \Sigma m \frac{d\bar{v}}{dt} + \Sigma \bar{R}.$$

Последователи Д'Аламбера называли величину  $\Sigma m \frac{d\bar{v}}{dt}$  действующими силами, а  $\Sigma \bar{R}$  — потерянными силами. У самого Д'Аламбера в формулировке его принципа таких терминов нет.

Но если принцип Д'Аламбера выражается равенством

$$\Sigma m \frac{d\bar{v}}{dt} = \Sigma \bar{F},$$

то отсюда вытекают такие следствия:

1. Никакое равновесие в принципе Д'Аламбера не рассматривается.
2. Никаких фиктивных сил в принципе Д'Аламбера нет.
3. Принцип Д'Аламбера можно вывести с абсолютной строгостью из законов Ньютона с обязательным включением третьего закона; без него невозможно было бы построить классическую механику системы материальных тел.

Следовательно, не были абсолютно правыми и защитники принципа Д'Аламбера, видевшие в нем необходимое дополнение к трем законам Ньютона для построения механики системы.

Если в принципе Д'Аламбера нет ни равновесия, ни фиктивных сил, то откуда же появились они в современных учебниках механики?

Дело заключается в определении понятия «эквивалентность» для системы сил: две системы сил называются эквивалентными, ес-

ли каждая из них в отдельности может быть уравновешена одной и той же системой сил.

При помощи этого определения совершенно строго доказываются все случаи эквивалентности сил и пар без каких-либо кинематических заимствований.

Если принять такое определение эквивалентности, то оказывается, что система «действительных сил»  $m \frac{d\bar{v}}{dt}$  и эквивалентная ей система

действующих сил  $\bar{F}$  должны быть уравновешены одной и той же системой сил. Но система сил  $m \frac{d\bar{v}}{dt}$  может быть уравновешена

системой сил —  $m \frac{d\bar{v}}{dt}$ , приложенных в тех же самых точках; эти си-

лы и называются силами инерции в смысле Д'Аламбера. Тогда и система действующих сил  $F$  тоже может быть уравновешена сис-

темой сил —  $m \frac{d\bar{v}}{dt}$ , а в этом и заключается современная формули-

ровка принципа Д'Аламбера: система сил может быть уравновешена даламберовыми силами инерции.

Если Эйлер не формулировал принципа, соответствующего принципу Д'Аламбера, то в какой мере в вышедшей в 1765 г. «Теории движения твердых тел» Эйлер мог использовать опубликованный в 1743 г. принцип Д'Аламбера?

При исследовании движения твердого тела Эйлер вводит так называемые элементарные силы, определяемые им таким образом: элементарными называются силы, которые, будучи в отдельности приложены в каждой элементарной частице тела, произведут в них то же самое изменение состояния, которое эти частицы действительно имеют в движении тела.

Эти элементарные силы следует настоятельно отличать от сил, которые действительно приложены к телу. Если узнать движение тела, произведенное приложенными к нему силами, то нужно определить, как изменится состояние каждой элементарной частицы. Тогда каждую из этих частиц можно рассматривать как существующую вполне самостоятельно, и на основании предыдущего легко определить силы, которые, будучи приложены к этим частицам, произведут то же самое изменение состояния. Все эти силы, взятые вместе, представляют то, что в дальнейшем следует понимать под элементарными силами. Все эти элементарные силы, взятые в совокупности, являются эквивалентными действительно приложенным к данному телу силам, так как обе эти системы сил производят то же самое изменение в движении тела.

Эти элементарные силы Эйлера представляют нечто аналогичное так называемым «действительным силам» у последователей Д'Аламбера, и при желании из их определения можно было бы заключить, что Эйлер имел в своем распоряжении какой-то принцип, аналогичный принципу Д'Аламбера.

Более простым было бы, однако, предположение, что понятие элементарных сил возникло в связи с тем, что данное твердое тело Эйлера рассматривают как состоящее из элементарных частиц совершенно так же, как в механике сплошной среды. Существенным являются именно элементарные частицы, введение которых позволяет Эйлеру установить связь между механикой точки и механикой твердого тела.

## ДВИЖЕНИЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА. РАБОТЫ ЭЙЛЕРА БЕРЛИНСКОГО ПЕРИОДА

После отъезда из России Эйлер был приглашен прусским королем Фридрихом II в Берлинскую Академию наук.

Возобновление работы пришлось вести уже в другой обстановке.

Данное Ньютоном решение задачи об исследовании планетного движения предполагало, что планеты являются материальными точками. Теперь планеты, в частности Землю и Луну, надо было рассматривать как твердые тела. Для этого в первую очередь пришлось установить более точно форму Земли, которую уже нельзя было рассматривать как геометрический шар. Эта задача тоже была поставлена Ньютоном, который считал, что Земля представляет сплюснутый к экватору эллипсоид вращения. Во Франции появилась другая теория, которую защищали парижские астрономы Кассини; для решения этого вопроса пришлось отправить две геодезические экспедиции: одну на север — в Лапландию, другую на юг — в Перу. Результаты этой экспедиции показали, что прав был Ньютон, а не Кассини, предполагавшие на основе предшествующих не слишком точных геодезических измерений, что Земля представляет эллипсоид вращения, вытянутый к полюсам.

Если Земля является точным шаром, то задача о силе ее притяжения других тел была уже решена Ньютоном: Земля притягивает другие планеты, как если бы вся ее масса была сосредоточена в ее центре. Но если Земля представляет эллипсоид, то силу ее притяжения необходимо определить заново. Этой задачей занялись английские ученые Маклорен (1698—1746) и Айвари (Jvory), определившие силы притяжения эллипсоидов.

Вторая задача касалась определения движения планет, рассматриваемых как твердое тело. Уже давно было известно, что Земля кроме вращения вокруг собственной оси и обращения вокруг Солнца имеет еще два движения, а именно: известное еще Гиппарху прецессионное движение, которое было достаточно хорошо вычислено математически, но совершенно не объяснено динамически, и недавно открытая Брадлеем нутация земной оси. Этими вопросами занялись Алексис Клеро (1713—1765) и Д'Аламбер.

Клеро очень рано проявил свой математический талант и в восемнадцать лет был принят в члены Парижской академии. Он принимал участие во французской экспедиции по измерению градуса меридиана в Лапландии (1736—1737), и опубликованная в 1743 г. его «Теория фигуры Земли» положила начало высшей геодезии. Он

принимал участие в предвычислении появления кометы Галлея и пытался построить математическую теорию движения Луны.

Д'Аламбер в 1749 г. выпустил «Трактат о предварении равноденствий и нутации земной оси», а в 1761 г. — мемуар «О движении тел произвольной формы под действием произвольных сил». Параллельно с ним и совершенно независимо от него вел работу Эйлер. В 1750 г. он написал статью «Открытие нового принципа механики» («Записки Берлинской Академии наук», т. 14, стр. 185—217). Ему пришлось начинать с кинематики, и первое, что он сделал, это вместо своих естественных уравнений движения материальной точки принял введенные Маклореном уравнения движения, разложенные по прямоугольным координатным осям. Это позволило ему дать формулу для скорости точки во вращательном движении твердого тела. Поставленная им задача имела несколько необычную чисто математическую форму. Требовалось найти такие функции  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , которые могли бы удовлетворять уравнениям

$$\frac{dx}{dt} = L(x, y, z, t); \quad \frac{dy}{dt} = M(x, y, z, t); \quad \frac{dz}{dt} = N(x, y, z, t)$$

при условии сохранения неизменности расстояний между точками абсолютно твердого тела:

$$\sqrt{\delta x^2 + \delta y^2 + \delta z^2} = \sqrt{(\delta x + Ldt)^2 + (\delta y + Mdt)^2 + (\delta z + Ndt)^2}$$

для любых возможных перемещений тела.

Оказалось, что искомые функции  $L$ ,  $M$ ,  $N$  должны иметь вид:

$$L = qz - ry; \quad M = rx - pz; \quad N = py - qx,$$

где  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — любые функции времени. Это хорошо известные уравнения Эйлера, в которых  $p$ ,  $q$ ,  $r$  — суть проекции на координатные оси угловой скорости  $\omega$ . Понятие угловой скорости тела в это время было Эйлеру неизвестно; он определяет угловую скорость вращающегося вокруг неподвижной оси твердого тела как скорость точки, расстояние от которой до оси вращения принято за единицу (unitate exprimitur)\*. Термина «угловое ускорение» не было, но проекции линейных ускорений можно было получить простым дифференцированием скоростей

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} &= \frac{dq}{dt} z + q \frac{dz}{dt} - \frac{dr}{dt} y - r \frac{dy}{dt} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} + q(py - qx) - \\ &- r(rx - pz) = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} + p(qy + rz) - x(q^2 + r^2) \end{aligned}$$

и аналогично для остальных.

Таким образом началась работа, которая потребовала 25 лет для того, чтобы получить знаменитые динамические уравнения Эйлера для движения твердого тела.

В сочинении «Теория движения твердых тел» Эйлер последова-

\* Отметим, что это определение применял Н. Е. Жуковский в курсе «Теоретическая механика», читавшемся в МВТУ.

тельно рассматривает поступательное (*progressivus*) и вращательное (*gyratorius*) движения, а затем и общий случай движения твердого тела.

Поступательным он называет движение, в котором отдельные точки тела в любой момент времени движутся с одинаковыми скоростями по взаимно параллельным направлениям. Основным признаком вращательного движения он считает наличие оси вращения — жестко соединенной с телом прямой, вокруг которой происходит движение тела. Если эта ось неподвижна, то скорости точек тела пропорциональны их расстояниям до этой оси. На этом этапе появляется уже цитированное выше определение угловой скорости.

В качестве углового ускорения Эйлер пользовался величиной  $\alpha$ , которую он определял из выражения  $d\omega = \alpha dt^2$ , где  $d\omega$  — угол поворота за время  $dt$  считался бесконечно малым второго порядка; это вполне соответствует современному определению

$$\frac{d^2\varphi}{dt^2} = \varepsilon.$$

При рассмотрении этих движений Эйлер ставил три задачи:

1. Привести к простейшему виду систему сил, действующих на тело.

2. Определить получающееся движение.

3. Найти величину сил, действующих на связи.

Если вращение происходит с постоянной угловой скоростью  $\omega$ , то система действующих на тело сил равна нулю. Давление на ось складывается из элементарных центробежных сил. Если ось вращения  $Ox$  и угловая скорость  $\omega$ , то центробежная сила, действующая на точку с координатами  $x, y, z$  и элементарной массой  $dm$ , распадается на две составляющие

$$dY = \omega^2 y dm; \quad dZ = \omega^2 z dm.$$

Складывая отдельно элементарные силы по осям  $y$  и  $z$ , Эйлер получил две взаимно перпендикулярные силы

$$Y = \int \omega^2 y dm; \quad Z = \int \omega^2 z dm,$$

приложенные к оси вращения в двух точках с абсциссами

$$x_y = \frac{\int xy dm}{\int y dm}, \quad x_z = \frac{\int xz dm}{\int z dm}.$$

Таким образом, система центробежных сил инерции приводится к двум взаимно перпендикулярным силам  $X$  и  $Z$ , приложенным к оси вращения в двух различных точках. Современная система «моторов» Мизеса уже была знакома Эйлеру.

Если тело вращалось с ускорением  $\varepsilon$ , то последнее определялось как частное от деления момента движущей силы на величину  $\int r^2 dm$ , которую Эйлер назвал моментом инерции и указал, что во вращательном движении она играет ту же роль, что масса в движении материальной точки. Определив угловое ускорение, можно аналогичным путем привести тангенциальные силы инерции к двум

взаимно перпендикулярным силам, которые теперь уже не будут пересекаться ни между собой, ни с осью вращения.

Понятие о моменте инерции уже было введено Эйлером при составлении первого тома «Морской науки», где он дал определение момента инерции, вычислил его для некоторых наиболее простых тел. При вычислении их он доказывает теорему о параллельных осях, известную теперь под именем теоремы Штейнера или Гюйгенса.

При определении центра качания Гюйгенс пользовался упомянутым соотношением, но он не обратил внимания на употребляемую им при вычислениях величину, которую Эйлер назвал моментом инерции. Понятие о моменте инерции расширилось: Эйлер умел уже находить моменты инерции относительно любой оси, он имел материал, соответствующий теореме о шести постоянных. Он ввел понятие о трех взаимно перпендикулярных главных осях, составил кубическое уравнение для определения их направлений и указал, что одна из них имеет наибольший, а другая — наименьший момент инерции. Он не знал только эллипсоида инерции, понятие о котором было введено потом Пуансо. Введенное им понятие о главных центральных осях позволило ему определить свободные оси вращения.

После этого Эйлер изучал общий случай движения тела. Он показал, что в таком движении можно выделить поступательную составляющую, которую удобнее всего относить к центру инерции. Движение, оставшееся после выделения поступательного, можно рассматривать как движение вокруг неподвижной точки. Для такого движения он доказал теорему Д'Аламбера, позволявшую утверждать, что движение тела с одной неподвижной точкой в каждый момент времени можно рассматривать как вращение вокруг некоторой оси.

Систему действующих на тело внешних сил он раскладывал на две силы, одна из которых проходит через центр инерции, а другая производит вращательное движение вокруг некоторой оси. Эту ось Эйлер уже не считал обязательно перпендикулярной к плоскости, проходящей через центр инерции и линию действия полученной первой силы, — ошибка, которую он сделал в 1740 г. при составлении первого тома «Морской науки».

Поэтому ставилась задача — определить направление оси вращения, проходящей через неподвижную точку, и соответствующую угловую скорость. Параллельно с этим он решал задачу: как изменится угловая скорость уже вращающегося твердого тела с неподвижной точкой, если к ней прибавить другую угловую скорость, которая получилась бы под действием момента, приложенного самостоятельно к рассматриваемому телу. Эта задача понадобилась ему в связи с исследованием прецессии Земли.

После этих соображений общего характера Эйлер перешел к решению основной задачи и начал с простейшего случая, когда на рассматриваемое тело не действуют никакие внешние силы, а неподвижная точка совпадает с центром инерции. Он последователь-

но рассматривал три частных случая: когда тело имеет три равных главных центральных момента инерции, затем когда равны только два главных момента и, наконец, когда все три момента различны.

Первый случай его не затруднял: тело постоянно вращается с той угловой скоростью, которую оно получило в начальный момент. Во втором случае Эйлер нашел, что тело равномерно вращается вокруг некоторой подвижной оси, которая в свою очередь тоже равномерно вращается вокруг некоторой неподвижной оси, образуя с последней все время один и тот же угол; величина этого угла, а также величины двух получающихся угловых скоростей определяются начальными условиями (этот случай представляет то, что в настоящее время называется регулярной прецессией).

В самом общем случае Эйлер разбирался, но полученные им формулы оказались настолько сложными, что он остался неудовлетворенным.

В 1775 г. Эйлер нашел то решение, которое в настоящее время записывается в виде носящих его имя динамических дифференциальных уравнений.

Центр инерции тела, который после определения поступательно-го движения тела можно считать неподвижным, берется в качестве начала двух координатных систем, одна из которых неподвижна, а другая соединена с движущимся телом; координатные оси этой системы совпадают с главными осями инерции движущегося тела. Движение тела можно изобразить движением этой подвижной системы, положение которой определяется эйлеровыми углами  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\Theta$ .

Пусть  $x, y, z$  — координаты точек тела в подвижной системе, а  $p, q, r$  — проекции угловой скорости тела на оси подвижной системы координат.

Выведенные Эйлером формулы для проекций скоростей имеют вид

$$\frac{dx}{dt} = qz - ry; \quad \frac{dy}{dt} = rx - pz; \quad \frac{dz}{dt} = py - qx.$$

После дифференцирования этих формул получаем

$$\frac{d^2x}{dt^2} = z \frac{dq}{dt} - y \frac{dr}{dt} + p(qy + rz) - x(q^2 + r^2);$$

$$\frac{d^2y}{dt^2} = x \frac{dr}{dt} - z \frac{dp}{dt} + q(rz + px) - y(r^2 + p^2);$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} = y \frac{dp}{dt} - x \frac{dq}{dt} + r(px + qy) - z(p^2 + q^2).$$

Принимаем, что эти уравнения написаны в подвижной системе координат; тогда в левой их части стоят проекции на оси подвижных координат ускорений точек с координатами  $x, y, z$  в подвижной системе. Если эти ускорения помножить на массы  $m$  каждой точки, то получим элементарную силу; действующую на эту точку. Составим моменты этих сил относительно подвижных осей координат

нат. Образует выражение

$$y \frac{d^2 z}{dt^2} - z \frac{d^2 y}{dt^2} = (y^2 + z^2) \frac{dp}{dt} - xy \frac{dq}{dt} - xz \frac{dr}{dt} + \\ + prxy - pqxz + rq (y^2 - z^2) + yz (r^2 - q^2).$$

Помножив его на  $m$ , получим момент элементарной силы относительно оси  $x$ . Сумма всех таких моментов, распространенная на все тело, равна моменту внешних сил относительно оси  $x$ . Если оси подвижной системы координат являются главными центральными осями инерции, то суммы произведений вида  $mxy$ ,  $m yz$ ,  $m xz$  равны нулю и момент  $M_x$  внешних сил относительно подвижной оси  $Ox$

$$M_x = \Sigma m (y^2 + z^2) \frac{dp}{dt} + \Sigma m q r (y^2 - z^2).$$

Если положить

$$\Sigma m (y^2 + z^2) = A; \Sigma m (z^2 + x^2) = B; \Sigma m (x^2 + y^2) = C,$$

то

$$M_x = A \frac{dp}{dt} - (B - C) q r.$$

Аналогично

$$M_y = B \frac{dq}{dt} - (C - A) r p;$$

$$M_z = C \frac{dr}{dt} - (A - B) p q.$$

Таким образом, получены уравнения Эйлера. Интегрируя их, найдем зависимость составляющих  $p$ ,  $q$ ,  $r$  угловой скорости от времени  $t$ .

Кинематические уравнения Эйлера, определяющие параметры  $p$ ,  $q$ ,  $r$  через скорости  $\frac{d\varphi}{dt}$ ,  $\frac{d\psi}{dt}$ ,  $\frac{d\theta}{dt}$  после второй интеграции дадут выражения  $\varphi$ ,  $\psi$  и  $\theta$  в функции времени, иными словами, определяют движение рассматриваемого твердого тела.

## ЖОЗЕФ-ЛУИ ЛАГРАНЖ.

### ПРИНЦИП ВОЗМОЖНЫХ ПЕРЕМЕЩЕНИЙ. ОСНОВАНИЯ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

Три великих имени характеризуют развитие механики в XVIII в.: Ньютон создал систему классической динамики, Эйлер выразил ее в математической форме, Лагранж подвел все итоги развитию механики XVIII в. и создал произведение, которое стало определяющим для теоретической механики первой половины XIX в.

Жозеф-Луи Лагранж (1736—1813) родился в Турине — столице Сардинского королевства, на долю которого в XIX в. выпала роль объединителя Италии. Он не мог похвалиться знатностью рода; его отец, служивший военным казначеем, разорился, и Лагранжу приходилось пробивать себе дорогу собственными силами. Его математические способности были замечены, и он работал в качестве

преподавателя в одном из ю-  
енных училищ Турина, но в  
возрасте 30 лет покинул ро-  
дину.

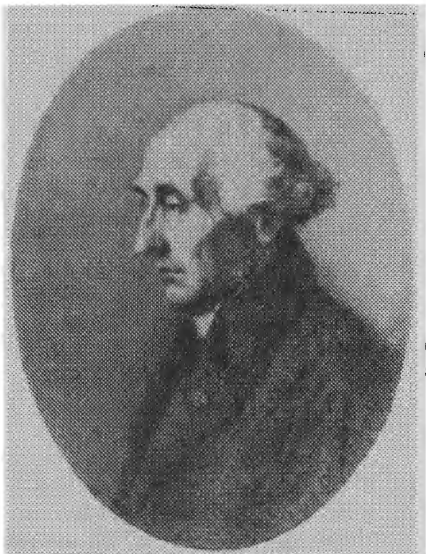
В 1759 г. он стал членом  
Берлинской Академии наук, в  
1766 г. переехал в Берлин и за-  
нял пост президента физико-  
математического отделения  
после Эйлера, продолжателем  
которого он и является. Его  
можно было бы назвать ско-  
рее математиком, чем механи-  
ком, но в XVIII в. еще не про-  
изошло дифференциации меж-  
ду этими науками.

В предисловии к «Анали-  
тической механике» он писал  
о том, что цель создания этой  
книги — свести теорию меха-  
ники и методы решения свя-  
занных с нею задач к общим  
формулам, простое развитие  
которых дает все уравнения,  
необходимые для решения  
каждой задачи.

Он сознательно не дает чертежей в своей книге даже там, где  
они имели бы существенное значение в понимании вопроса (напри-  
мер, в его доказательстве принципа возможных перемещений при  
помощи полиспастов). Излагаемые им методы не требуют ни по-  
строений, ни геометрических или механических рассуждений; они  
требуют только алгебраических операций, подчиненных планомер-  
ному и однообразному ходу. Все любящие анализ с удовольствием  
убедятся в том, что механика становится новой отраслью анализа.

После «Аналитической механики», вышедшей в 1788 г., он на-  
писал книгу «Теория аналитических функций» (1797) и связанные  
с ней «Лекции по исчислению функций» («Leçons sur le calcul des  
Fonctions»), вышедшие в 1801 г., а затем «Решение числовых урав-  
нений» (1798).

Если Гюйгенс считал теорию чисел «не заслуживающей внима-  
ния», а Эйлер касался ее лишь мимоходом, то Лагранж посвятил  
ей ряд мемуаров, в частности о решении в целых числах неопреде-  
ленных уравнений второй степени. Его исследования в области при-  
кладных наук касаются или движения твердого тела (первый мему-  
ар в 1773 г.), или же астрономии, занятия которой были как бы обя-  
зательными для каждого механика XVIII в.; ей он также посвятил  
ряд мемуаров, напечатанных в Берлинской и Парижской Академи-  
ях; наиболее замечательным является мемуар о задаче трех  
тел (1772).



*Ж. Лагранж (1736—1813)*

Иногда Лагранж представляют кабинетным ученым-математиком, далеким от каких-нибудь практических задач. Такое представление о Лагранже нельзя назвать правильным. Во время революции 1789—1794 гг. он участвовал в создании Политехнической школы, в работах по установлению метрической системы, и Конвент, издавший декрет об удалении из Франции всех иностранцев, сделал исключение для Лагранжа, хотя он родился вне Франции и переехал в Париж только в 1788 г. В 1794—1795 гг. он читал лекции по арифметике и алгебре для учеников Нормальной школы (подготовительной к Политехнической), а в следующем году участвовал в «Собрании различных сочинений по политической арифметике».

Основным произведением Лагранжа является его «Аналитическая механика», которую он разделяет на две части: статику и динамику; это первое произведение, в котором объединяются оба эти отдела механики, разрабатывавшиеся до этого времени независимо один от другого. В главе «Статика» Лагранж ставит общий принцип, называемый им «принцип виртуальных скоростей», в настоящее время «принцип возможных, или виртуальных, перемещений». Вот какое определение Лагранж дает статике: статика есть наука о равновесии сил. Вообще под силой (*force*), или потенцией (*puissance*), подразумевают какую бы то ни было причину, сообщающую или стремящуюся сообщить движение телу, к которому она предполагается быть приложенной; и этим количеством движения, сообщенного, или готового быть сообщенным, и следует оценивать силу, или потенцию.

В дальнейшем Лагранж оба термина для обозначения силы употребляет почти одинаково; самое большее, что можно заметить, это то, что потенцией он чаще называет движущую силу. Затем, характеризуя силу количеством движения, он сближает обычные силы с ударными (для обозначения которых он употребляет термин «импульс»); термина «ускорение» Лагранж не знает; он пользуется ньютоновым термином «ускоряющая сила», понимая под этим силу, деленную на массу, или силу, действующую на единицу массы. Это определение силы через скорость чувствуется и в самом названии принципа «виртуальная скорость», хотя в доказательстве его Лагранж употребляет не термин «скорость», а термин «перемещение».

Формулировку своего принципа Лагранж дает в таких выражениях: если на какую-либо систему тел или точек действуют какие-либо потенции и эта система находится в равновесии и если этой системе сообщить какое-либо малое движение, в результате которого каждая точка пройдет бесконечно малое пространство, то сумма потенций, умноженных каждая на пространство, которое точка ее приложения проходит по направлению этой самой потенции, всегда равна нулю, если считать положительными малые пути, проходимые в направлении силы, а отрицательными — проходимые в противоположном направлении.

Доказательство этого принципа Лагранж производит заменяя каждую силу (потенцию) полиспастом  $AB$ , где  $A$  — неподвижная обойма, а  $B$  — подвижная, представляющая собой точку приложе-

ния силы (рис. 37); направление силы определяется последовательностью от  $A$  к  $B$ , а величина — числом оборотов нитей, проходящих в полиспасте от  $A$  к  $B$ .

Пусть точки  $B_1, B_2, B_3$  — точки приложения сил  $P_1, P_2, P_3$ , а  $A_1, A_2, A_3$  — неподвижные обоймы соответствующих полиспастов. В точке  $A_1$  закрепляется гибкая нить, которая проходит через  $B_1$  и после  $n_1$  оборотов идет к  $A_1$  и  $A_2$ ; затем через  $n_2$  оборотов через  $B_2$  возвращается к  $A_2$ , идет к  $A_3$  и через  $n_3$  оборотов возвращается к  $A_3$ ,

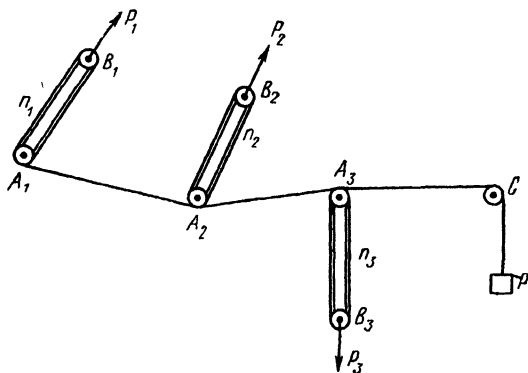


Рис. 37

откуда через неподвижный блок  $C$  опускается вниз, имея на конце груз  $P$ , представляющий общую меру всех сил  $P_1, P_2, P_3$ :

$$P_1 = n_1 P; P_2 = n_2 P; P_3 = n_3 P.$$

Точкам  $B_1, B_2, B_3$  даем перемещения, проекции которых на направления полиспастов соответственно  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$ . Если вся система находится в равновесии, то остается неподвижной и точка  $C$  приложения груза  $P$ . Поскольку нить нерастяжима, то алгебраическая сумма всех ее удлинений равна нулю:

$$n_1 \alpha_1 + n_2 \alpha_2 + n_3 \alpha_3 = 0,$$

откуда после умножения этого равенства на  $P$  получаем:

$$P_1 \alpha_1 + P_2 \alpha_2 + P_3 \alpha_3 = 0,$$

что и доказывает формулируемый принцип.

В общем случае, если приложенные силы  $P, Q, R, \dots$ , а длины полиспастов  $p, q, r, \dots$ , то бесконечно малые перемещения  $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \dots$  выразятся через дифференциалы и формула Лагранжа получает вид

$$P dp + Q dq + R dr + \dots = 0.$$

Каждый член этой формулы, например  $P dp$ , Лагранж называет моментом силы  $P$ , принимая термин «момент» в том смысле, кото-

рый дает ему Галилей, т. е. как произведение силы на ее виртуальную скорость.

В настоящее время можно поставить вопрос: является ли принцип возможных перемещений не требующим доказательства, чем-то вроде новой аксиомы, или же его можно свести к более первоначальным принципам, например к трем аксиомам Ньютона? Попробуем это сделать с той точностью, которая требуется сейчас.

Так как любую механическую систему можно рассматривать как совокупность материальных точек, то достаточно ограничиться лишь тем, что будем считать доказанными все теоремы, касающиеся материальной точки; для этого понадобится лишь определение элементарной работы и теорема кинетической энергии.

Прежде всего нужно выяснить, что подразумевается под равновесием системы материальных точек или тел и, в частности, каково различие между двумя терминами «равновесие» и «покой».

В геометрической статике рассматривают равновесие сил и равновесие тела. Под равновесием сил, приложенных к твердому телу, подразумевается случай, когда совокупность этих сил образует систему, эквивалентную нулю.

Рассматривать равновесие сил, приложенных к различным телам, в самом общем случае не имеет физического смысла. Если силы, приложенные к одному твердому телу, находятся в равновесии, то тело может находиться в покое или же совершать инерционное, т. е. прямолинейное поступательное и равномерное, движение.

В аналитической статике различие между покоем и равновесием устанавливается так. Считают, что система материальных точек находится в покое, если можно найти такую инерциальную систему отсчета, для которой скорости всех ее точек в данный момент или в течение некоторого промежутка времени равны нулю.

Отметим, что это определение не исключает «мгновенного покоя», когда скорости всех точек системы равны нулю только в данный момент времени (например, брошенное вверх тело будет находиться в покое, когда оно достигнет наибольшей высоты). Равновесия в данном случае нет, так как ускорения точек тела в этот момент не равны нулю.

Равновесие может наблюдаться только в течение некоторого сколь угодно малого, но не равного нулю, промежутка времени; его определение кроме равенства нулю скоростей требует и равенства нулю ускорений; скорости точек тела должны не только быть, но и оставаться равными нулю. Это требует предположения равенства нулю в рассматриваемый момент также и ускорений.

В геометрической статике при помощи аксиомы связей можно решать задачи на равновесие тела, когда оно считается свободным.

При пользовании методом Лагранжа это не является необходимым. Наложённые на точку связи могут выражаться уравнениями или неравенствами, которым должны удовлетворять координаты этой точки (или вообще точек системы); если в уравнениях этих связей время явно не входит, т. е. связи не изменяются с течением времени, то связи называются склерономными, в противном случае

они являются реономными. И в том и в другом случае такие связи называются голономными или целочисленными. Может случиться, что связи налагаются также и на скорости различных точек и не могут быть выражены уравнениями, содержащими только координаты: такие связи называются неголономными. Во времена Лагранжа такие связи не употреблялись, но представление о них он имел.

Понятие о связях соединено с понятием о возможных перемещениях; возможными называем перемещения, которые допускают связи в рассматриваемый момент. Если уравнение связи имеет вид  $f(x, y, z, t) = 0$ , то возможное перемещение должно удовлетворять уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0. \quad (1)$$

Время  $t$  в данном случае остается постоянным. Действительными называются перемещения  $dx$ , происходящие в некоторый, хотя бы бесконечно малый, промежуток времени  $dt$ ; они удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz + \frac{\partial f}{\partial t} dt = 0. \quad (2)$$

Возможные перемещения обозначают  $\delta$ —вариации, действительные  $d$ —дифференциалы. Возможные перемещения могут зависеть от времени (возможное сегодня может оказаться невозможным завтра), но для каждого момента времени их может существовать бесконечно большое количество. Действительное перемещение, совершающееся между моментами  $t$  и  $t + dt$ , для промежутка времени  $dt$  может быть только одно. Возникает вопрос: будет ли среди возможных перемещений  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  находиться и действительное? Вид уравнений (1) и (2) показывает, что это может быть только в том случае, когда  $\frac{\partial f}{\partial t} = 0$ , т. е. если связи склерономные.

Таким образом, действительное перемещение может и не оказаться среди возможных. Это кажется парадоксальным, так как все естественные процессы подчиняются законам природы, которые считаются постоянными, во всяком случае в некоторой области пространства и в некоторый промежуток времени. Но эти законы можно рассматривать тоже как некоторые связи, причем эти связи следует считать склерономными.

Если рассчитывать положения планет две тысячи лет тому назад, то надо предполагать, что в то время планетные законы были такими же, как и в тот момент, когда эти расчеты производятся.

Пусть

$$L = 0; M = 0; N = 0, \dots$$

различные уравнения между координатами точек системы (считаем, что время  $t$  в них не входит). В таком случае возможные перемещения получим продифференцировав эти уравнения. Они удов-

летворят условиям

$$dL = 0; dM = 0; dN = 0, \dots$$

По Лагранжу, с помощью уравнений

$$dL = 0; dM = 0, dN = 0$$

будем выражать условные уравнения между этими дифференциалами, независимо от того, являются ли эти уравнения сами по себе полными дифференциалами или же нет при условии, что дифференциалы только линейные.

Случай, когда  $dL\dots$  имеют вид

$$dL = A_1 dx + A_2 dy + A_3 dz$$

и т. д., и не представляют полного дифференциала, т. е. не могут быть проинтегрированы, как раз и характеризует неголономные связи.

Введем еще одно определение. Если условие голономной связи выражается уравнением  $L = 0$ , то связь называется неосвобождающей, а возможные перемещения — двусторонними, иными словами, если возможно перемещение  $\delta r$ , то будет возможным и перемещение  $-\delta r$ . Если же эти условия выражаются неравенствами  $L \geq 0$ , то связи называют освобождающими, а перемещения — односторонними; точка может покинуть связь  $L = 0$  только в том направлении, где  $L$  может иметь положительные величины, но не наоборот.

Теперь в формулированное выше Лагранжем выражение принципа введем следующие дополнения:

- 1) система подсчета должна быть инерциальной;
- 2) связи не должны зависеть от времени;
- 3) сумма элементарных работ на возможных перемещениях должна быть или равна нулю (связи неосвобождающие), или меньше нуля (связи освобождающие).

Выраженное условие должно быть и необходимым и достаточным.

Необходимость условия доказывается следующим образом. Прежде всего, если хотя бы одна из точек движется, то, согласно определению, равновесия нет. Поэтому можно лишь предположить, что в некоторый момент все точки системы находятся в покое. Докажем, что эта система остается в покое. Так как связи не зависят от времени, то в числе возможных перемещений находятся и действительные; сообщим их системе; если сумма элементарных работ при этом перемещении больше нуля, то, согласно теореме о кинетической энергии, система получает некоторую кинетическую энергию; иными словами, если хоть одна из точек системы обладает скоростью, то равновесие невозможно.

Достаточность условия доказывается так. Предположим, что в некоторый момент времени все точки находятся в покое, т. е. кинетическая энергия системы равна нулю. Если теперь при всех возможных перемещениях, в числе которых есть и действительные, сумма элементарных работ равна нулю или меньше нуля, то кинетическая энергия системы не может стать положительной, следовательно, система остается в покое.

тическая энергия системы или остается такой же, или уменьшается. Но так как кинетическая энергия не может быть меньше нуля, то последний случай исключается; следовательно, равная нулю в начальный момент кинетическая энергия остается такой же и в последующие моменты, т. е. наблюдается состояние равновесия.

После этого рассматриваются методы вычисления виртуальных моментов  $Pdp$ . Лагранж указывает, что  $P$  может быть не только «линей» (т. е. длиной), но и вообще какой угодно величиной. Таким образом, вводится понятие об обобщенной координате и соответственно этому об обобщенной силе. Это представляет новый и очень существенный этап развития механики, который в полной мере был оценен только во второй половине XIX в.

Лагранжева обобщенная сила может быть чем угодно — силой, вращающим моментом и т. д., но только не векторной величиной. Введение обобщенных координат позволяет составлять уравнения равновесия материальной системы, не расчленяя ее на части. Обобщенная координата представляет параметр, определяющий положение рассматриваемой системы. Если связи голономны, то число степеней свободы равно числу независимых параметров (координат), определяющих положение системы; в общем случае число степеней свободы определяется как число независимых перемещений, которые может иметь эта система.

В «Статике» Лагранж выводит шесть уравнений равновесия свободного твердого тела и рассматривает свойства равновесия, относящиеся к «максимуму» и «минимуму», и в частности случай, когда выражение

$$Pdp + Qdq + Rdr + \dots$$

оказывается полным дифференциалом некоторой функции координат  $p, q, r, \dots$ . Эта функция обозначена  $\Pi$ . Позже она получила название силовой, или потенциальной, функции. При ее наличии отыскание положений равновесия системы сводится к определению максимумов и минимумов функции  $\Pi$ . Случаи максимума и минимума Лагранж связывает с понятием об устойчивости равновесия; в современной форме минимум потенциальной энергии соответствует устойчивому, а максимум — неустойчивому положению равновесия.

Лагранж рассматривает также метод неопределенных множителей. Если  $p, q, r$  — обобщенные координаты, то уравнение Лагранжа имеет вид

$$P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots = 0. \quad (1)$$

В случае свободной системы получаем уравнение равновесия, приравнявая к нулю коэффициенты при  $\delta p, \delta q, \dots$ . Если на систему наложены связи, уравнения которых

$$L = 0; \quad M = 0; \quad N = 0, \quad (a)$$

то уравнения равновесия можно получить помножив полные дифференциалы в левых частях этих уравнений на неопределенные множители  $\lambda, \mu, \nu$  и прибавив их к (1).

Решение задачи сведем к нахождению корней системы уравнений:

$$P + \lambda \frac{\partial L}{\partial p} + \mu \frac{\partial M}{\partial p} + \nu \frac{\partial N}{\partial p} = 0;$$

$$Q + \lambda \frac{\partial L}{\partial q} + \mu \frac{\partial M}{\partial q} + \nu \frac{\partial N}{\partial q} = 0;$$

.....

Число этих корней равно числу обобщенных координат  $p, q, r$ , к которому присоединяется число уравнений (а). Лагранж показывает, что член  $\lambda \delta L$  можно рассматривать как «момент» некоторой силы  $\lambda$ , стремящейся изменить значение функции  $L$ . Таким образом, метод неопределенных множителей позволяет кроме положений равновесия системы определить также и сопротивления связей (реакции), выражаемых уравнениями (а).

В «Статике» Лагранж выводит также уравнения равновесия гибкой нити и условия равновесия идеальной жидкости.

Отметим, что обобщенные силы у Лагранжа не являются векторами, поэтому вопросы приведения систем к простейшему виду полностью выпадают из рассмотрения. Связи у Лагранжа являются связями идеальными. Поэтому совершенно естественно, что на практике к изложению Лагранжа пришлось добавить большое количество материала весьма разнородного качества: произошло разделение механики на теоретическую и техническую.

Принцип виртуальных скоростей Лагранжа был создан не в 1788 г., когда вышла «Аналитическая механика». Первое упоминание о нем встречается в мемуаре о либрации Луны (1764 г.), помещенном в трудах Парижской Академии.

Перейдем к рассмотрению динамики Лагранжа. Обычно считается, что вся она выросла из так называемого всеобщего уравнения механики, или принципа Д'Аламбера в форме Лагранжа,

$$\Sigma \left[ \left( X - m \frac{d^2 x}{dt^2} \right) \delta x + \left( Y - m \frac{d^2 y}{dt^2} \right) \delta y + \dots \right] = 0.$$

Лагранж пользуется вместе с Ньютоном и Эйлером понятием об ускоряющих силах (силах, действующих на единицу массы), которые у него выражаются вторыми производными  $\frac{d^2 x}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 y}{dt^2}$ ,  $\frac{d^2 z}{dt^2}$

для различных координатных осей. Каждое тело  $m$  системы можно рассматривать как находящееся под действием подобных сил; следовательно, все эти силы должны быть эквивалентны тем, под влиянием которых, согласно допущению, находится система, и действие которых видоизменяется вследствие природы самой системы. Поэтому он сравнивает выражения:

момент ускоряющих сил

$$\Sigma m \left( \frac{d^2 x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2 y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2 z}{dt^2} \delta z \right)$$

и момент действующих сил

$$P \delta p + Q \delta q + R \delta r + \dots$$

Этот момент Лагранж берет со знаком минус, поскольку, согласно его условиям, силы  $P, Q, R, \dots$  стремятся уменьшить линии  $p, q, r, \dots$ , представляющие собой расстояния от точек систем до центров сил, к которым направлены силы, приложенные к материальным точкам системы\*.

Таким образом, основное уравнение динамики Лагранж приводит в виде

$$\Sigma m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \delta x + \frac{d^2y}{dt^2} \delta y + \frac{d^2z}{dt^2} \delta z \right) = - (P\delta p + Q\delta q + R\delta r + \dots).$$

Из этого уравнения Лагранж выводит три основные теоремы динамики, или, как их называли в то время, принципы движения центра тяжести, площадей и живой силы.

В «Динамике» Лагранж вводит динамические уравнения первого и второго рода. Уравнения первого рода не представляют интереса: они приводятся в декартовых координатах с такими же неопределенными множителями, как уравнения равновесия в статике. Но уравнение второго рода следует рассмотреть.

Лагранж исходит из общего уравнения динамики, которое приведем без сумм:

$$\left( X - m \frac{d^2x}{dt^2} \right) \delta x = 0.$$

Вводим обобщенные координаты:

$$x = x(q_1, q_2, \dots, q_n, t) = x(q, t);$$

$$\delta x = \frac{\partial x}{\partial q} \delta q.$$

Действующие силы  $X, Y, \dots$ , выраженные через  $q$ , принимают вид  $Q(q)$ . Тогда исходное уравнение

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x = X \delta x$$

приведем в виде

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \delta x = Q \delta q. \quad (a)$$

В правой части стоит сумма работ обобщенных сил; левая часть имеет размерность кинетической энергии; попробуем выразить ее через кинетическую энергию  $T = \frac{m}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2)$ .

Постараемся освободиться от производных второго порядка. Левую часть выразим по известной формуле

$$u dv = d(uv) - v du.$$

Тогда

$$\frac{d}{dt} (m \dot{x}) \delta x = \frac{d}{dt} (m \dot{x} \delta x) - m \dot{x} \frac{d}{dt} (\delta x).$$

---

\* В доказательстве при помощи полиспастов Лагранж считал положительным направление силы от  $B$  к  $A$  — центру неподвижного блока; точка  $A$  и называлась центром силы.

Согласно основной лемме вариационного исчисления, производная от вариации  $\delta x$  равна вариации от производной  $\dot{\delta x}$ . После этого второе слагаемое принимает вид

$$m\dot{x}\delta\dot{x} = \delta \left( \frac{m\dot{x}^2}{2} \right) = \delta T = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q}.$$

Первое слагаемое преобразуем так, чтобы в нем тоже получилась частная производная от величины  $T$ :

$$\begin{aligned} \delta x &= \frac{\partial x}{\partial q} \delta q; \\ \dot{x} &= \frac{\partial x}{\partial q} \dot{q} + \frac{\partial x}{\partial t}. \end{aligned}$$

Возьмем частную производную от  $\dot{x}$  по обобщенной скорости  $\dot{q}$ :

$$\frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial x}{\partial q}.$$

Таким образом, первое слагаемое получает вид

$$\frac{d}{dt} \left( m\dot{x} \frac{\partial x}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( m\dot{x} \frac{\partial \dot{x}}{\partial \dot{q}} \delta \dot{q} \right) = \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) \delta \dot{q}.$$

и уравнение (а) в окончательном виде

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}} \right) - \frac{\partial T}{\partial q} = Q$$

представит уравнение Лагранжа второго рода.

Эти уравнения имеют многочисленные приложения; Лагранж использовал их при установлении теории малых колебаний около положения устойчивого равновесия.

Для изучения колебаний с двумя и более переменными Лагранж исследовал теорию квадратичных форм. При выводе уравнения частот в случае системы со многими переменными Лагранж допустил ошибку, не исправленную в течение 70 лет (независимо друг от друга ее заметили К. Вейерштрасс и О. И. Сомов в 1858 г.); в случае равных корней он считал, что кроме колебательных движений существуют и так называемые вековые изменения, когда время  $t$  встречается не только под знаком синуса или косинуса.

В 1773 г., всего за два года до получения Эйлером общих уравнений движения твердого тела с одной неподвижной точкой, Лагранж получил интегралы движения тяжелого симметричного тела вокруг оси симметрии, проходящей через неподвижную точку; в этом случае два главных центральных момента инерции равны, а третий берется относительно оси, проходящей через центр тяжести и неподвижную точку. Эта задача была уже решена Эйлером в 1764 г. для случая, когда центр тяжести совпадал с неподвижной точкой.

Если в начальный момент вращение совершается вокруг некоторой оси, проходящей через неподвижную точку, то при отсутствии внешних сил кинетический момент относительно этой оси является постоянным по величине и по направлению.

То же самое наблюдается и для кинетического момента относительно оси симметрии, который равен проекции на эту ось начального кинетического момента. Но если начальный момент и его проекция на ось симметрии все время являются постоянными, то это показывает, что угол между этими осями (угол нутации) тоже постоянный, так что угловая скорость нутации окажется равной нулю.

Таким образом, получающееся движение можно рассматривать как результат сложения двух вращений: одно совершается с постоянной угловой скоростью вокруг оси симметрии, а другое заставляет эту ось описывать конус вокруг неподвижной начальной оси тоже с постоянной угловой скоростью (прецессия). Получается так называемая регулярная прецессия — движение, в котором угловая скорость нутации равна нулю, а скорости прецессии и собственного вращения имеют постоянные величины.

## ПРИНЦИП НАИМЕНЬШЕГО ДЕЙСТВИЯ

Сущность динамики точки заложена во втором законе Ньютона. Дана точка, имеющая массу  $m$  и подверженная силе  $F$ ; требуется определить движение этой точки.

Если известно начальное положение точки, а также ее скорость, то при помощи уравнения Ньютона можно определить ускорение, а следовательно, и приращение скорости, которое точка получит в течение бесконечно малого времени  $dt$ . Если в начальный момент  $t_0$  положение точки определяется радиусом-вектором  $\bar{r}_0$ , величина скорости  $\bar{v}_0$ , а определенное из уравнения Ньютона ускорение для начального момента  $\bar{a}_0$ , то для момента  $t_1 = t_0 + dt$  положение точки и ее скорость определяются формулами

$$\bar{r}_1 = \bar{r}_0 + \bar{v}_0 dt, \quad \bar{v}_1 = \bar{v}_0 + \bar{a}_0 dt.$$

Момент  $t_1$  можно рассматривать как начальный. Определив для него величину ускорения  $\bar{a}_1$ , для момента  $t_2 = t_1 + dt$  получим

$$\bar{r}_2 = \bar{r}_1 + \bar{v}_1 dt; \quad \bar{v}_2 = \bar{v}_1 + \bar{a}_1 dt.$$

Переходя таким образом от одного момента к следующему за ним через бесконечно малый промежуток  $dt$ , для ряда моментов имеем

$$t_0; t_1 = t_0 + dt; t_2 = t_1 + dt; t_3 = t_2 + dt \dots,$$

т. е. ряд величин, определяющих соответственно положение и скорости движущейся точки для этих моментов:

$$\begin{array}{ccccccc} \bar{r}_0 & \bar{r}_1 & \bar{r}_2 & \bar{r}_3 & \dots \\ \bar{v}_0 & \bar{v}_1 & \bar{v}_2 & \bar{v}_3 & \dots \end{array}$$

и таким образом можно определить движение точки за любой заданный конечный промежуток времени.

Математический анализ позволяет сразу определить величины  $\bar{r}$  и  $\bar{v}$  для любого момента времени, если можно проинтегрировать уравнение Ньютона

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F};$$

если же это уравнение нельзя проинтегрировать в элементарных функциях, то получаем интеграл приближенно при помощи операции, описанной выше.

Метод, который использован выше, основан на принципе, формулируемом вторым законом Ньютона; такие принципы, выражаемые при помощи дифференциального уравнения, носят название *дифференциальных*. При их применении общий процесс разбивается на ряд последовательных бесконечно малых процессов и устанавливаются способы перехода от одного момента времени к следующему.

Не следует считать, что дифференциальные принципы обязательно связаны только с делением времени на бесконечно малые промежутки  $dt$ . Можно воспользоваться тем же методом при определении формы равновесия гибкой нити, находящейся под действием заданной системы сил; можно разбить длину этой нити на бесконечно малые элементы  $ds$ . Зная положение начала первого элемента  $ds$ , соответствующее натяжение  $\bar{T}_0$  и действующую на этот элемент силу  $\bar{F}$ , можем получить соответствующее приращение натяжения  $d\bar{T}$ , составляя уравнение равновесия для этого момента: если  $\bar{F}$  — сила, приходящаяся на единицу длины элемента  $ds$ , то уравнение равновесия этого элемента имеет вид

$$\bar{T}_0 + \bar{F}ds = \bar{T}_0 + d\bar{T};$$

что позволит найти натяжение  $\bar{T}_1 = \bar{T}_0 + d\bar{T}$  в конце этого элемента и начале следующего.

Операция, аналогичная вышеописанной, позволит определить величину натяжения  $T$  в функции длины  $s$  нити от начальной точки; поскольку же направление натяжения совпадает с направлением касательной к кривой, представляющей форму нити, то при помощи вторичного интегрирования можно определить положение концов последовательных участков  $ds$ , а следовательно, и форму нити.

Предположим, что нить является однородной и находится под действием силы тяжести. Известно, что положение устойчивого равновесия системы тяжелых материальных точек получается, если центр тяжести этой системы занимает наинизшее положение. Исходя из этого принципа, можно получить уравнение искомой кривой, так называемой цепной линии, потребовав, чтобы интеграл  $\int qgyds$  имел наименьшую величину ( $q$  — масса, приходящаяся на единицу

длины нити, а  $y$  — координата точки рассматриваемой кривой). Такие принципы носят название *интегральных* или *вариационных*; для решения соответствующих задач в середине XVIII в. Эйлер изобрел вариационное исчисление. Теперь уже не требуется последовательное построение нужной кривой (или вообще функции, определяющей течение рассматриваемого процесса), а она выбирается из общего числа возможных при помощи условия, чтобы функция, дающая ответ на поставленную задачу, определялась из условия максимума или минимума некоторого интеграла.

В динамике интегральные принципы появились только во второй половине XVIII в., но в теории распространения света они были известны уже очень давно. Так, в эллинистическую эпоху было известно, что закон равенства углов падения и отражения светового луча мог быть получен из требования, чтобы при отражении луч света проходил из начального положения в конечное в кратчайшее время. В XVII в. математик *Пьер Ферма* (1601—1665), познакомившись с опубликованным Декартом законом преломления света (этот закон был найден голландцем Снеллием), усомнился в этом законе. Каково было его удивление, когда он, предположив, что при преломлении луч переходит из начального положения в конечное, вывел для преломления те же самые законы, которым не хотел доверять.

В дальнейшем подобные задачи стали встречаться чаще. В 1696 г. Иван Бернулли опубликовал знаменитую задачу о брахистохроне, или кривой наискорейшего ската. Это кривая, по которой должно спускаться тяжелое тело, чтобы пройти в кратчайшее время из начального положения в конечное, не лежащее на одной вертикали с началом. Задача была решена рядом математиков, причем оказалось, что искомая кривая должна быть циклоидой.

В 1697 г. И. Бернулли поставил задачу — провести кратчайшую линию между двумя точками, лежащими на произвольной поверхности. Он показал, что в любой точке кратчайшей линии главная нормаль перпендикулярна к касательной плоскости, т. е. искомая кривая является геодезической линией этой поверхности. И. Бернулли не опубликовал полученного результата, но предложил заняться этим вопросом своему ученику Эйлеру. Эйлер напечатал в 1728 г. (ему было тогда всего 21 год) решение поставленной перед ним задачи. Продолжая заниматься этим вопросом, он в 1744 г. показал, что для траекторий точек, описываемых под действием центральных сил, интеграл  $\int v ds$  равен максимуму или минимуму. Специального названия этому выражению он, однако, не дал.

В области динамики первый интегральный принцип был введен в 1747 г. французским ученым Пьером-Луи Мопертюи (1690—1759). В истории науки Мопертюи известен прежде всего своим участием в экспедиции, отправленной в 1736 г. в Лапландию для измерения длины градуса земного меридиана. Это было сделано для проверки теоретических работ Гюйгенса и Ньютона, утверждавших, что Земля имеет форму сплюснутого эллипсоида вращения.

Основатель династии французских астрономов Джованни-Доменико Кассини держался мнения, что Земля представляет вытянутый эллипсоид вращения; это же мнение разделяли его сын Жак и внук Франсуа, при которых во Франции начали производить точные геодезические измерения. Чтобы разрешить вопрос об истинной форме Земли, французская Академия наук в 1735—1736 гг. снарядила две экспедиции — одну под руководством Мопертюи и Клеро в Лапландию, а другую под начальством Буге и Ла-Кондамина в Перу.

Результаты обоих градусных измерений показали, что Земля представляет сплюснутый эллипсоид вращения; таким образом, победа оказалась на стороне ньютоновцев, к которым принадлежал и Мопертюи. Попутно заметим, что лапландская экспедиция отражена и в философском романе Вольтера «Микромегас», где житель Сириуса Микромегас беседует с членами лапландской экспедиции. Вольтер очень высоко ставил Мопертюи, прославлял его деятельность в стихах и прозе, составил надпись для его портрета и в письменных обращениях к нему называл его «mon cher applatisseur des mondes et des Cassinis» («мой дорогой, приплюснувший миры и Кассини»).

Мопертюи в 1741 г. уехал в Берлин, где Фридрих II назначил его президентом Берлинской Академии. В 1747 г. он выпускает первый набросок своего «принципа наименьшего действия». Этому принципу знаменитый Эйлер оказал честь его защитой; одновременно он объяснил автору всю ширину и надлежащее употребление его принципа. Однако этот принцип вызвал большое количество возражений.

Одним из возражающих был член Берлинской Академии Кениг, библиотекарь принцессы Оранского дома и профессор общего права в университете Гааги, который тоже занимался математикой. Будучи сторонником Лейбница и теории живой силы, он доказал носящую его имя теорему о кинетической энергии в плоском движении твердого тела. Кениг не только опроверг этот принцип, но даже утверждал, что он не является новым, и цитировал отрывок из письма Лейбница, в котором содержалось указание на этот принцип.

Защищая Кенига, Вольтер написал остроумную «Диатрибу доктора Акакия», которая имела во Франции колоссальный успех.

Репутация Мопертюи была уничтожена, ему пришлось уехать из Берлина во Францию, где он и умер в 1759 г. Как пишет Вольтер, вся литературная Европа ополчилась против него, кроме Эйлера и Мериана, которые приняли участие в этом процессе.

Решающим в этом вопросе является мнение Эйлера. Математическая формулировка принципа Мопертюи была бы таковой: интеграл  $\int mv ds$  имеет минимальное значение. Эйлер воспользовался равенством  $ds = v dt$  и написал этот интеграл в виде

$$\int mv^2 dt = \int 2T dt.$$

Принцип наименьшего действия в форме Эйлера состоит в том,

что при всяком действительном движении вышеприведенный интеграл должен иметь наименьшую величину. Постараемся выяснить, что это означает.

Как уже выяснено, при измерении движения в XVIII в. существенным было не само движение, а его изменение. Если независимым переменным является время, то движение нужно выражать формулой  $tv$ ; если же независимым переменным будет пройденный путь или перемещение, то для движения нужно взять выражение  $\frac{1}{2}tv^2$ . Затем, как было известно еще Галилею, не всегда движение в кратчайшее время совпадает с движением по кратчайшему пути.

Предположим, что из точки  $C$  (рис. 38) надо опустить тяжелое тело на наклонную плоскость  $AB$ , образующую с горизонтом угол  $\alpha$ . Если сделать это по кратчайшему пути, то должны пустить тело по прямой  $CD$ , перпендикулярной к плоскости  $AB$ ; эта прямая образует с вертикалью угол, равный  $\alpha$ . Если же выполнить этот переход в кратчайшее время, то должны пустить тело по более крутой прямой  $CF$ , образующей с вертикалью угол, равный лишь половине  $\alpha$ . Решая эту задачу, можно выразить в зависимости от угла наклона  $\varphi$  прямой расстояние  $s$  от начальной точки  $C$  до плоскости  $AB$  или время  $t$ , которое потребовалось бы для движения по этой прямой согласно законам равноускоренного движения.

Получив зависимости  $s = f_1(\varphi)$  и  $t = f_2(\varphi)$ , дифференцируем эти уравнения и из всех возможных значений угла  $\varphi$  выбираем нужные:

$$ds/d\varphi = 0 \text{ и } dt/d\varphi = 0;$$

при этом обе зависимости  $s = f_1(\varphi)$  и  $t = f_2(\varphi)$  вполне определенные.

В задаче о цепной линии постановка является совершенно другой. Имеется начальная и конечная точки прикрепления нити  $A(x_0, y_0)$  и  $B(x_1, y_1)$ . Требуется найти такое выражение  $y = F(x)$ , при котором высота  $h$  центра тяжести нити была бы наименьшей возможной. Для этого необходимо, чтобы интеграл

$$\int_{x_0}^{x_1} y ds = \int_{x_0}^{x_1} y \sqrt{1 + \dot{y}^2} dx$$

имел наименьшую величину. Если решать эту задачу подбором, то нужно взять ряд кривых  $y = F_1(x)$ ,  $y = F_2(x)$  и т. д., вычислить для них значение указанного интеграла и взять ту функцию, для которой величина интеграла окажется наименьшей. При этом пришлось бы рассматривать семейство линий, проходящих через точки  $A$  и  $B$ , причем для одного и того же значения  $x$  получим различные значения  $y$ ; разности  $\delta y$  этих значений и представляют так называемые вариации. Только в точках  $A$  и  $B$ , где ординаты

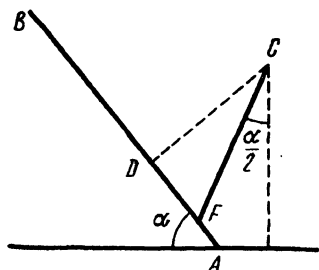


Рис. 38

сохраняют постоянное значение, получаем, что вариация будет равна нулю.

Такая переменность встречалась при рассмотрении принципа возможных перемещений, где возможные перемещения, обозначавшиеся  $\delta$ , были, по существу, вариациями.

Таким образом, при отыскании минимума интеграла (основная задача вариационного исчисления) надо рассматривать уже не отдельные точки, а семейства кривых или изображаемых ими функций. Это семейство определяется уравнением  $y = f(x, \varepsilon)$ , где  $\varepsilon$  — переменный параметр, позволяющий выделять различные кривые семейства.

Подобно тому как возможные перемещения подчинялись определенным условиям (удовлетворяли уравнениям связей), так и вариации тоже должны удовлетворять некоторым условиям. Например, при движении точки по линии или вообще при переходе системы из начального положения в конечное можно потребовать, чтобы все возможные переходы совершались в один и тот же промежуток времени: это будут так называемые изохронные вариации. В случае Эйлера требуемое условие заключалось в том, чтобы удовлетворялся закон сохранения механической энергии. Такое же требование было поставлено и Лагранжем, обобщившим принцип наименьшего действия на случай нескольких точек.

$$\sum m_i \int v_i ds_i = \text{минимум.}$$

Применение принципа наименьшего действия в механике осложнялось тем, что нельзя сразу указать, какая величина должна иметь максимум или минимум, а от выбора этой величины зависели и условия, каким должны были удовлетворять вариации. Этим объясняется то, что в дальнейшем приходилось уточнять название применяемого принципа; кроме закона наименьшего действия Эйлера — Лагранжа в XIX в., как изложено ниже, появился принцип наименьшего действия по Гамильтону.

## СИЛА КАК ВЕКТОР

Разбирая второй закон Ньютона и возникшую по его поводу дискуссию, употребляли два возможных определения силы (в прямолинейном движении):

$$F = \frac{d}{dt} (mv) \text{ и } F = \frac{d}{dx} \left( \frac{mv^2}{2} \right).$$

Оба эти закона вполне справедливы и равноправны, но все же представляют довольно существенные различия между собой. Первое определение, основанное на дифференцировании количества движения, легко можно распространить и на общий случай пространственного движения точки; достаточно лишь выразить это равенство в векторной форме:

$$\vec{F} = \frac{d(m\vec{v})}{dt}.$$

Что касается второго определения, то, поскольку кинетическая энергия не является векторной величиной, выразить его так сразу нельзя; придется создать специальный математический аппарат.

Таким образом, имеется два различных возможных направления развития: векторное и скалярное. Родоначальником скалярного направления является Лагранж, в механике которого кинетическая и потенциальная энергии имеют большое значение.

Во втором направлении развития — школе количества движения, или геометрической школе, — основным понятием является изображение силы в виде вектора.

В настоящее время понятие силы-вектора настолько применимо, что трудно даже представить иной термин. В действительности, конечно, дело было совсем не так просто. В древности понятие силы как мощности вообще исключало идею о направлении; в средние века можно было различать «тяжесть в зависимости от положения» (*gravitas secundum situs*), но это было лишь зародышем идеи о направлении.

Направление силы вполне определилось, когда силу стали выражать через количество движения, но и вектор, изображающий силу, по существу, определял даже не скорость, а геометрический отрезок прямой линии, представлявший путь, пройденный телом за определенный промежуток времени, большая часть принятый за его единицу. Оба элемента силы — величина и направление — мыслились совершенно независимо одна от другой.

Чтобы убедиться в этом, проследим, каким образом рассматривал это Лагранж. Определяя направление силы, он рассматривал точку приложения силы, затем на прямой, по которой действовала сила, он брал точку, называемую центром действия (идея эта, вероятно, восходит к Ньютону и к его центростремительным силам); к этой точке была направлена приложенная сила. Расстояние от точки приложения силы до центра ее действия представлялось скалярной величиной, уменьшавшейся во время действия силы; поэтому виртуальные моменты Лагранжа и получались отрицательными. Таким образом, величина силы  $P$  и определявший ее направление отрезок существовали вполне независимо и соединялись только при образовании виртуального момента.

Современное изображение силы отрезком, который одновременно давал и величину силы, и ее направление, появилось позже и притом еще без стрелки — направление определялось последовательностью букв при начале и конце отрезка.

Какие же принципы были определяющими для такого представления силы? Прежде всего это требование наглядности, необходимой для массового распространения механических знаний среди новой инженерной профессии, начало которой положил Монж в начертательной геометрии. Но, кроме того, были и другие причины.

В XVIII в. в математике большое распространение получила идея о применении мнимого числа. В XVII в. можно было не применять мнимые числа, так как при решении алгебраических уравне-

ний существенное значение имели лишь действительные числа; но так называемый неприводимый случай (*casus irreductibilis*) в решении кубического уравнения с тремя действительными корнями требовал особого рассмотрения. В течение же XVIII в., когда после работ Эйлера выяснилось, что показательные и тригонометрические функции восходят к общему корню и различаются лишь теми значениями, действительными или мнимыми, которые принимает аргумент, положение существенно изменилось. Мнимые числа уже начали становиться (тоже в какой-то степени) такими же реальными, как и действительные. Встал вопрос о каком-то реальном их изображении.

Отметим, что постановка и правильное решение этого вопроса были сделаны не специалистом-математиком; это был норвежец Гаспар Вессель (1745—1818), геодезист по специальности, работа которого «Об аналитическом представлении направлений» (*Om directionens analytiske Betegning*) была напечатана в 1799 г. в «Трудах» Датской Академии наук. Он показал, что при помощи комбинаций четырех взаимно перпендикулярных единиц  $1$ ,  $-1$ ,  $i$  и  $-i$  можно представить любое направление на плоскости; таким образом, комплексное число  $z = x + yi$ , где  $x$  и  $y$  — любые положительные или отрицательные числа, а  $i = \sqrt{-1}$ , может на плоскости представить любой отрезок и по величине, и по направлению.

Хотя работа Весселя, написанная на датском языке и помещенная в малораспространенном издании, была правильно оценена только во второй половине XIX в., но аналогичные представления были развиты и другими математиками; в частности, на это в конце XVIII в. обратил внимание Гаусс. Проводивший измерения на плоскости, Вессель легко выполнял свою работу пользуясь комплексными числами, зависящими только от двух единиц.

В механике при переходе к пространству трех измерений можно было бы добавить еще одну единицу, но, к сожалению, дело вышло не так просто: оказалось невозможным построить систему комплексных чисел на основе трех единиц, не нарушая законов, которым должны удовлетворять правила действия над числами при их дальнейших обобщениях. Особые трудности возникли при определении операции умножения.

Основных законов было пять:

1. Произведение двух чисел должно быть числом того же рода, что и перемножаемые.

Это значит, что произведение двух прямолинейных отрезков должно быть тоже отрезком, а не площадью прямоугольника, построенного на этих отрезках.

2. Переместительный закон:  $a \cdot b = b \cdot a$ .

3. Сочетательный закон  $(a \cdot b) \cdot c = a \cdot (b \cdot c)$ .

4. Распределительный закон  $(a + b)c = ac + bc$ .

5. Произведение двух чисел может равняться нулю, если равен нулю один из множителей.

Эти законы выполняются для всех чисел, рассматриваемых в алгебре, включая и обыкновенные комплексные числа с мнимой

и действительной единицами. При дальнейшем обобщении нельзя было сохранить все эти законы. Можно было пренебречь переместительным и сочетательным законами, поскольку они требовали лишь определенной последовательности совершения операций. Но остальные законы сохранить было необходимо.

Что касается первого закона, то важность его сохранения поняли еще древние греки, так как в геометрии они должны были ограничиваться перемножением только двух отрезков (площадь) или трех (объем).

Необходимость распределительного закона очевидна: без него была бы невозможной алгебра.

Пятый закон позволяет решать алгебраические уравнения высших степеней путем разложения их на множители и последовательного приравнивания к нулю каждого из множителей.

Покажем, что для комплексных чисел вида

$$ai + bj + ck$$

пятый закон не может быть удовлетворен.

Пусть даны два числа

$$A = ai + bj + ck, \quad X = xi + yj + zk,$$

где  $a, b, c$  — заданные действительные числа,  $x, y, z$  — какие угодно числа, не равные одновременно нулю. Перемножая  $A$  и  $X$  по правилу умножения многочленов, получаем девять членов с произведениями  $ii, ij, ik$  и т. д. Так как произведение должно содержать только три члена и все единичные векторы имеют абсолютную величину, равную единице, то каждое из девяти произведений их должно равняться какому-либо из векторов  $i, j, k$  с коэффициентом  $\pm 1$ . Рассмотренное произведение имеет вид

$$(A_1x + B_1y + C_1z)i + (A_2x + B_2y + C_2z)j + (A_3x + B_3y + C_3z)k,$$

где коэффициенты  $A, B, C$  — известные числа из ряда  $a, b, c$ , помноженные на  $\pm 1$ . Для равенства нулю этого произведения необходимо, чтобы

$$A_1x + B_1y + C_1z = 0; \quad A_2x + B_2y + C_2z = 0; \quad A_3x + B_3y + C_3z = 0.$$

Эти уравнения имеют тривиальные решения  $x = y = z = 0$  или они являются неопределенными, если равен нулю детерминант из коэффициентов

$$\begin{vmatrix} A_1 & B_1 & C_1 \\ A_2 & B_2 & C_2 \\ A_3 & B_3 & C_3 \end{vmatrix} = 0.$$

Так как каждый из коэффициентов  $A, B, C$  является линейной функцией от  $a, b, c$ , то, считая два из них, например  $b$  и  $c$ , известными и раскрывая детерминант, получаем относительно  $a$  уравнение третьей степени, которое всегда имеет один действительный корень — пусть  $a_0$ . Тогда число

$$a_0i + bj + ck,$$

помноженное на любое число  $xi + yj + zk$ , даст в произведении нуль, хотя ни один из множителей не равен нулю. Отсюда следует, что комплексное число с тремя (или вообще с  $2n + 1$ ) единицами не удовлетворяет приведенным основным законам. Для этого нужно было бы, чтобы все корни уравнения, полученного из разложения детерминанта, были мнимыми, а это возможно лишь в том случае, если степень этого уравнения будет четной, что легко можно проверить для обыкновенных комплексных чисел вида  $a + bi$ .

Когда это было установлено, то Гамильтон (1805—1865) попробовал взять комплексное число с четырьмя единицами вида

$$A = a_0 + a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k},$$

так называемый кватернион. Первое слагаемое (действительное число) он называл скаляром, а совокупность трех остальных — вектором. Достаточно рассмотреть лишь правило умножения векторных частей:

$$\bar{A} = a_1\bar{i} + a_2\bar{j} + a_3\bar{k}; \quad \bar{B} = b_1\bar{i} + b_2\bar{j} + b_3\bar{k}.$$

Произведения одинаковых единичных векторов Гамильтон положил равными  $-1$ :

$$\bar{i}\bar{i} = \bar{j}\bar{j} = \bar{k}\bar{k} = -1.$$

Для произведения неравных единичных векторов Гамильтон отказался от закона переместительности и вывел известные теперь формулы для векторного произведения:

$$\bar{i}\bar{j} = -\bar{j}\bar{i} = \bar{k}; \quad \bar{j}\bar{k} = -\bar{k}\bar{j} = \bar{i}; \quad \bar{k}\bar{i} = -\bar{i}\bar{k} = \bar{j}.$$

После этого произведение  $\bar{A} \cdot \bar{B}$  приняло вид

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = -(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}.$$

Получен кватернион, первая часть которого, взятая со знаком минус, получила теперь название скалярного произведения двух векторов:

$$\bar{A} \cdot \bar{B} = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3,$$

а вторая, векторная часть получила название векторного произведения  $\bar{A} \times \bar{B}$ .

Нетрудно проверить, что для произведения двух кватернионов пятый основной закон выполняется, так что кватернионы, а следовательно, и их частные случаи — векторы, имеют право на существование в качестве обобщенных комплексных чисел (с некоторыми ограничениями — произведение двух векторов есть кватернион).

То обстоятельство, что вектор можно рассматривать как некоторое обобщенное число, позволяет упростить ряд операций с силами, если доказать, что сила есть вектор.

Типическим вектором — комплексным числом является так на-

ываемый радиус-вектор, т. е. отрезок, имеющий размерность длины, проведенный из начала координат к заданной точке, координаты которой  $x, y, z$ :

$$\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}.$$

Приращение  $d\vec{r}$  этого вектора является тоже вектором. Если разделить его на скалярную величину  $dt$ , то векторная природа его не изменится: направление остается таким же и изменяется лишь величина. Это показывает, что

$$d\vec{r}/dt = \vec{v},$$

где  $v$  — скорость, т. е. вектор.

Аналогично покажем, что ускорение  $\vec{a}$  тоже является вектором. Но по второму закону Ньютона сила равняется произведению вектора ускорения на массу, являющуюся скаляром. Тогда сила  $\vec{F} = m\vec{a}$  тоже является вектором и подчиняется всем правилам действия над ними, в том числе и сложению. Таким образом, закон параллелограмма сил доказывать не надо; он уже доказан тем, что сила является вектором.

Не надо, однако, считать, что все величины, которые складываются по правилу сложения векторов, тоже являются векторами. Дело в том, что координаты радиуса вектора изменяются при изменении осей координат, хотя вектор как геометрический образ остается неизменным. Таким образом, координаты вектора (проекции силы) при изменении координатных осей (при том же начале) должны изменяться так же, как и координаты точки. Это характерно для проекций силы, но для вектора — момента силы  $\vec{r} \times \vec{F}$  этого нет.

Отложим от начала координат отрезок, изображающий вектор-момент, и отметим геометрические координаты его конца. Если изменить направление координатных осей на прямо противоположные, то проекции  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  изменят знаки, но проекции выражения  $(-\vec{r}) \times (-\vec{F})$  останутся такими же. Это показывает, что вектор-момент есть псевдовектор, а если так, то закон параллелограмма моментов надо доказывать; это и делается в теореме Вариньона.

Обычно векторное изображение применяют только к свободным векторам, но можно обобщить его и для скользящих векторов.

Пусть сила  $X, Y, Z$  приложена в точке  $(x, y, z)$ . Имеем шесть различных единиц, но изобразить силу шестимерным вектором не удастся, ибо координаты  $x, y, z$  не складываются алгебраически. Заменим координаты некоторыми их функциями, которые при векторном сложении складываются алгебраически. Это будут моменты относительно координатных осей:

$$L = \begin{vmatrix} y & z \\ Y & Z \end{vmatrix}; M = \begin{vmatrix} z & x \\ Z & X \end{vmatrix}; N = \begin{vmatrix} x & y \\ X & Y \end{vmatrix}.$$

Тогда получим шестимерный вектор

$$\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k} + (yZ - zY)\vec{i} + (zX - xZ)\vec{j} + (xY - yX)\vec{k}.$$

Единичные векторы первой и второй половины имеют различные размерности: в первой половине — силы, а во второй — момента.

Конечно, решая уравнения  $L = 0$ ,  $M = 0$ ,  $N = 0$  координат  $x$ ,  $y$ ,  $z$  точки определить нельзя, но этого и не требуется, так как вектор, скользящий и линию его действия получим из уравнений  $L = yZ - zY$ ,  $M = zX - xZ$ ,  $N = xY - yX$ , которые представляют проекции линии действия на координатные плоскости.

Если имеется система скользящих сил, то приведение ее к простейшему виду получается простым сложением таких шестимерных векторов. После сложения в шести столбцах получаем главный вектор, минимальный момент и уравнение линии действия равнодействующей или центральной оси.

Эту методику можно применить и к закрепленным векторам; только в этом случае вместо векторного произведения  $\vec{r} \times \vec{F}$  нужно перемножить  $\vec{r}$  и  $\vec{F}$  как кватернионы. Тогда во второй части появится еще один член, так называемый вириал:

$$V = xX + yY + zZ.$$

Геометрически это уравнение изображает плоскость, перпендикулярную к главному вектору. Точка пересечения этой плоскости с линией действия и будет точкой приложения равнодействующего вектора силы, если, конечно, минимальный момент равен нулю:

$$LM + MY + NZ = 0.$$

## ПЬЕР СИМОН ЛАПЛАС.

### ВОЗНИКНОВЕНИЕ НЕБЕСНОЙ МЕХАНИКИ

Закон всемирного тяготения, выведенный Ньютоном, позволил *Пьеру Симону Лапласу* (1749—1827) в конце XVIII в. разобраться в механике Солнечной системы и определить устойчивость движений небесных тел. Необъясненным оставалось лишь перемещение перигелия Меркурия, которое удалось получить в наше время на основе релятивистской механики.

Лаплас родился в семье крестьянина в Бомоне, небольшом местечке Нормандии. Первые годы его жизни мало известны. После окончания Бомонского колледжа, где он увлекался математикой, двадцатилетний Лаплас порывает со своими родителями и уезжает в Париж. У него были рекомендации, с которыми он явился к Д'Аламберу. Лаплас во время ожидания приема изложил свои мнения о механике, которые так понравились Д'Аламберу, что тот написал Лапласу письмо с назначением свидания, после чего Лаплас получил место преподавателя математики в Парижской военной школе. Он принял все меры, чтобы попасть в Академию. После первой неудачи в Париже он хотел получить место в Берлине, но Лагранж, ставший президентом Берлинской Академии после отъезда Эйлера в Россию в 1766 г., отсоветовал ему ехать в Берлин, и в 1773 г. Лаплас делается адъюнктом, а в 1785 г. — полноправным членом Парижской Академии.

Два предмета привлекали молодого Лапласа: теория вероятностей и небесная механика, которой он посвятил свою жизнь. Плодом его трудов была пятитомная «Небесная механика», написанная в период 1793—1825 гг. Основной трудностью при определении движения какой-либо планеты была необходимость учета притяжений и других планет, вызывавших определенные неравенства в движении. Эти неравенства могли быть вековыми (постоянными), накапливавшимися со временем, и периодическими, не влиявшими особенно сильно на движение планеты. Постоянные неравенства могли совершенно изменить движение планет и даже разрушить устойчивость движения Солнечной системы; поэтому они доставляли много беспокойства и неприятностей вычислителям.

Лаплас начал эту работу с 1773 г. Ему удалось показать, что ряд возмущений в планетных движениях, которые считались вековыми, в действительности после тщательного анализа оказались периодическими. Двенадцать лет потребовалось Лапласу, чтобы вполне разобраться в этом деле, и еще шесть лет для того, чтобы подготовить материал к составлению своего основного сочинения, первый том которого вышел в 1794 г.

Все сочинение состоит из шестнадцати книг, первая из которых была посвящена теоретической механике. В этой книге он говорит о силах, их измерении, условиях равновесия (по принципу возможных перемещений) и об уравнениях движения точки и системы, а также о семи основных интегралах — движения центра тяжести, законы площадей и кинетической энергии. Для системы, на которую не действуют никакие внешние силы (а такой считалась Солнечная система), он формулирует закон сохранения площадей (кинетического момента) и определяет так называемую неизменяемую плоскость Лапласа, перпендикулярную к направлению кинетического момента всей Солнечной системы.

Вторая книга посвящена общим законам движения планет и ряду последовательных приближений, которые приходится делать при вычислении этих движений. Затем идут книги, трактующие о форме небесных тел, теории приливов и вращении планет вокруг собственных осей (третья — пятая книги).

Третий и четвертый тома, вышедшие в 1802—1805 гг., посвящены определению движений каждой из планет Солнечной системы в отдельности, Луны, спутников и комет (шестая — девятая книги). Десятая книга трактует об отдельных частных вопросах (рефракции и т. д.); в ней дается изложение теории капиллярных явлений. Наконец, вышедший за два года до смерти Лапласа пятый том (1825) содержит дополнения, из которых для нас интересна двенадцатая книга — изложение вопросов притяжения сфер.

Результат работы Лапласа показал, что при помощи введенной Ньютоном силы всемирного тяготения можно совершенно точно представить движение всех тел Солнечной системы (кроме движения перигелия Меркурия). Это вызвало у Лапласа уверенность, что теория всемирного тяготения сможет объяснить и молекулярные силы; в частности, этого вопроса касалась разработанная Лапласом

теория капиллярности. Следует, однако, отметить, что дальнейшего развития молекулярная механика не получила: основная причина заключалась в неизвестности законов, которые управляют этими явлениями. Возрождение этой теории на более высоком уровне намечается лишь в наше время в связи с развитием физики элементарных частиц.

В 1812 г. вышел из печати второй большой труд Лапласа «Теория вероятностей». Занятия Лапласа этим вопросом имеют значение для его космогонической теории, получившей большую известность в течение XIX в. Эта теория резко выделяется из ряда других произведений Лапласа. Космогоническая теория Лапласа подвергалась математической обработке значительно позже у его последователей; сам Лаплас в вышедшей в 1796 г. работе «Изложение системы мира» поместил эту теорию в приложении «с осторожностью, которую должно внушать все то, что не является результатом наблюдения или расчета».

Лаплас считал, что на месте Солнечной системы была когда-то огромная газовая туманность, простиравшаяся далеко за пределы самой крайней планеты. Частицы этой туманности обладали беспорядочным движением, которое управлялось лишь законами случайности. Не было такого направления, по которому частицы двигались бы преимущественно перед всеми другими, так что всю туманность можно было считать находившейся как бы в покое. Никаких внешних сил на эту туманность не действовало и никакие связи не стесняли свободу ее движений; между частицами действовали только силы всемирного притяжения.

Тогда основные законы позволяли утверждать следующее:

1. Центр инерции этой туманности находится в покое или движется прямолинейно и равномерно.
2. Кинетический момент туманности остается постоянным относительно любого центра.

Пусть этот центр будет центром инерции туманности. По отношению к нему можно считать туманность находящейся в покое и все частицы движущимися беспорядочно; для наблюдателя, находящегося в этом центре, примерно столько же частиц кажутся движущимися по вращению стрелки часов, сколько и против вращения стрелки. Но можно ли утверждать, что ровно половина всех частиц должна двигаться по направлению стрелки, а другая — против него?

Если эти направления равновероятны (при наличии беспорядочности движения), то отношение чисел частиц, движущихся в ту и в другую сторону, при бесконечном возрастании их числа стремится к единице, но разность этих чисел, как показывает теория вероятностей, не стремится к нулю; она возрастает по мере увеличения числа членов. Возрастание этой разности будет, конечно, отставать от возрастания числа частиц (если их число возрастает в  $n$  раз, то разность увеличится примерно в  $\sqrt{n}$  раз), но может стать достаточно большой.

Это показывает, что и в случае первоначальной газовой туман-

ности между числами частиц, движущихся в противоположных направлениях, должна быть некоторая чисто случайная разность; следовательно, кинетический момент рассматриваемой туманности не будет равным нулю, и его начальное значение должно сохраняться постоянным в течение всего времени существования туманности. Если это значение не очень велико, то в начальных стадиях туманность можно считать практически не вращающейся; во всяком случае это вращение заметным не будет.

Но по мере того как в результате взаимного притяжения частиц туманность сжимается и радиус уменьшается, трансверсальные (поперечные) скорости частиц будут увеличиваться и бывшее сначала незаметным вращательное движение туманности все время возрастает. Настанет момент, когда вращение станет настолько сильным, что крайние частицы оторвутся, образуя кольцо, которое в свою очередь сожмется в планету, унося некоторый вращательный момент; этот момент проявится в двух формах — планета получит трансверсальную скорость, заставляющую ее совершать обороты вокруг Солнца, и, кроме того, будет вращаться вокруг собственного центра; этот вращательный момент при дальнейшем сжатии оторвавшейся массы может породить спутников планеты, а затем сохраниться в виде вращения планеты вокруг собственной оси.

Гипотеза Лапласа объяснила, почему центр инерции Солнечной системы практически совпадает с центром Солнца, почему орбиты планет находятся в одной примерно плоскости и почему направления движения планет вокруг Солнца одинаковы и совпадают с направлением вращения самих планет вокруг своей оси, а также и с направлением движения вокруг планет их спутников; даже направление собственного вращения Солнца вокруг своей оси остается таким же, как и направление движения планет вокруг Солнца.

В дальнейшем развитии науки встретились некоторые трудности: так, спутники Урана вращаются в плоскости, почти перпендикулярной к плоскости экватора, некоторые спутники вращаются в направлении, обратном направлению общего вращения, но, самое главное, оказалось, что кинетический момент Солнца (в его вращении вокруг собственной оси) гораздо меньше общего кинетического момента всех остальных планет, несмотря на то что общая их масса несравнима с массой Солнца. Это обстоятельство заставило в настоящее время отказаться от гипотезы Лапласа, громадное историческое значение которой остается несомненным: это была первая теория, объясняющая движение Солнечной системы без божественного вмешательства.

Лаплас принадлежал к числу людей, пораженных своей разносторонностью; хотя наибольших результатов он достиг в области небесной механики, но он много сделал также и в области анализа, теории вероятностей и теоретической механики.

В области механики Лаплас придерживался традиций Лагранжа или школы кинетической энергии, хотя этого термина тогда еще не существовало: употребляли термин «живая сила». Как показано

выше, понятие о силе как векторе можно совершенно естественно получить из представления о силе как производной по времени от количества движения. В случае прямолинейного движения точки силу, действующую на нее, можно определить тоже при помощи производной:

$$X = \frac{d}{dx} (mv^2/2),$$

но приведенная формула применима только к прямолинейному движению.

В криволинейном движении точки теорему кинетической энергии выразим в виде

$$d\left(\frac{mv^2}{2}\right) = Xdx + Ydy + Zdz,$$

где  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$  — суть составляющие силы по координатным осям.

Если стоящее в правой части выражение элементарной работы представляет полный дифференциал некоторой функции  $U$  от координат точки (Лагранж обозначал ее  $\Pi$ , не давая ей никакого названия), то уравнение кинетической энергии допускает интеграл

$$\frac{mv^2}{2} = U + C.$$

Если ввести обозначения  $T = mv^2/2$  для кинетической энергии и  $\Pi = -(U + C)$ , то получим закон сохранения механической энергии

$$T + \Pi = \text{const},$$

откуда  $dT = dU$ .

Функцию  $U$  Гамильтон назвал силовой. Так как

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то имеем нечто, аналогичное производной по времени от количества движения, но только в том случае, если силовая функция существует, что бывает не для всех сил. Очень существенно, что силовая функция имеется для наиболее важных сил, в том числе для всемирного тяготения, при исследовании которого она и была введена. Но ее появление было очень существенным шагом в развитии механики. До сих пор в механике рассматривались материальные точки или твердые тела, имеющие определенный (конечный) объем и величину. Силовую функцию  $U(x, y, z)$  можно рассматривать как характеризующую поле — пространство, каждой точке которого соответствует определенное число, которое получим, если подставим значения координат этой точки в выражение  $U(x, y, z)$ .

Таким образом, получается так называемое скалярное поле. Можно пойти дальше и каждой точке отнести определенный вектор: тогда получим векторное поле, в частности силовое поле. При существовании силовой функции  $U(x, y, z)$  каждой точке соответ-

ствует сила, определяемая выражением

$$\frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}.$$

Можно образовать эту силу при помощи некоторой операции, которую можно получить, обобщив понятие производной.

Производная  $\frac{dy}{dx}$  функции  $y = f(x)$  определяется как предел выражения

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x}.$$

Рассмотрим  $\Delta x$  как интервал изменения переменной, принимающей по его концам значения  $f(x)$  и  $f(x + \Delta x)$ . Предположим, что  $\Delta x$  — высота призмы, основания которой равны единице; объем этой призмы  $\Delta U = 1 \Delta x$ . Затем на основаниях призмы отметим единичные векторы нормалей: при входе —1, а при выходе +1. Тогда выражение, стоящее в числителе дроби, можно представить в виде

$$f(x + \Delta x)(+1) + f(x)(-1)$$

и рассматривать его как сумму двух площадей, помноженных каждая на соответствующее значение функции и единичный вектор нормали. Выражение, предел которого хотим найти, можем рассматривать как распространенную по поверхности полученной призмы сумму указанных произведений, деленную на объем этой призмы  $\Delta V$ . Тогда

$$\frac{dy}{dx} = \lim_{\Delta V \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x)(+1) + f(x)(-1)}{\Delta V}.$$

Эту операцию распространим и на случай скалярного поля, образованного значениями силовой функции  $U$ . Так как значения этой функции изменятся не только по одному направлению, то окружим рассматриваемую точку замкнутой поверхностью  $S$ , разобьем ее на элементы  $dS$ , имеющие нормали, определяемые единичными векторами  $\bar{n}$ , которые умножим на соответствующие значения функции  $U$ , и берем сумму всех таких площадок. Полученный интеграл по замкнутой поверхности принято выражать в виде

$$\oint_S U \bar{n} dS.$$

Эту сумму делим на объем  $V$ , ограниченный замкнутой поверхностью, и отыскиваем предел этой дроби, стягивая объем в точку. Полученное выражение обозначаем  $\nabla U$ :

$$\nabla U = \frac{\oint_S U \bar{n} dS}{V}.$$

Математики доказывают, что величина этого предела не зависит ни от формы замыкающей поверхности, ни от процесса стягивания ее в точку. Поэтому возьмем рассматриваемую поверхность в форме параллелепипеда, ребра которого  $dx$ ,  $dy$ ,  $dz$  параллельны

направлениям координатных осей; единичные векторы нормалей к граням параллелепипеда соответственно  $\pm \bar{i}$ ,  $\pm \bar{j}$ ,  $\pm \bar{k}$ . Пусть рассматриваемая функция в точке, лежащей в центре этого параллелепипеда, имеет значение  $U_0$ , расстояния от нее до граней параллелепипеда соответственно  $\frac{dx}{2}$ ,  $\frac{dy}{2}$ ,  $\frac{dz}{2}$ . Тогда интеграл  $\oint_S U \bar{n} dS$  представится в виде суммы трех пар площадок — граней рассматриваемого параллелепипеда, помноженных на соответствующие значения функции  $U$  и на единичные векторы нормалей. Для пары площадок, перпендикулярных к оси  $x$ , получим слагаемые

$$\left( U_0 + \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz (+\bar{i}), \quad \left( U_0 - \frac{\partial U}{\partial x} \frac{dx}{2} \right) dydz (-\bar{i})$$

и аналогично для остальных осей:

$$\begin{aligned} & \left( U_0 + \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dzdx (+\bar{j}), \quad \left( U_0 - \frac{\partial U}{\partial y} \frac{dy}{2} \right) dzdx (-\bar{j}), \\ & \left( U_0 + \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy (+\bar{k}), \quad \left( U_0 - \frac{\partial U}{\partial z} \frac{dz}{2} \right) dxdy (-\bar{k}). \end{aligned}$$

Сумма этих слагаемых после очевидных сокращений имеет вид

$$\frac{\partial U}{\partial x} dxdydz \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} dxdydz \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} dxdydz \bar{k}.$$

Разделив эту сумму на объем  $V = dxdydz$  параллелепипеда, получаем искомую производную в виде

$$\nabla U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}.$$

Эта производная имеет вид

$$\text{grad } U = \frac{\partial U}{\partial x} \bar{i} + \frac{\partial U}{\partial y} \bar{j} + \frac{\partial U}{\partial z} \bar{k}$$

и носит название градиента скалярной функции  $U$ .

Так как проекции действующей силы  $\bar{F}$  на координатные оси соответственно равны:

$$X = \frac{\partial U}{\partial x}, \quad Y = \frac{\partial U}{\partial y}, \quad Z = \frac{\partial U}{\partial z},$$

то сила  $\bar{F}$  получается как градиент от силовой функции  $U$ .

Описанную методику можно распространить и на случай векторного поля; для этого вместо скаляра  $U$  надо брать значения вектора  $\bar{F}$  поля в соответствующей точке и множить на единичный вектор направления. Так как это произведение может быть скалярным или векторным, то получаем два вида производной — дивергенцию и ротацию.

Дивергенция определяется так:

$$\text{div } \bar{F} = \frac{\oint_S \bar{F} \bar{n} dS}{V},$$

где  $S$  — площадь, а  $V$  — объем элемента.

Если  $\vec{F}$  — сила, определяемая силовой функцией  $U$ , то дивергенция вектора  $\vec{F}$

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2}.$$

В случае ротации

$$\text{rot } \vec{F} = \frac{\oint_S (\vec{F} \times \vec{n}) dS}{V},$$

или в раскрытом виде, если  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$ :

$$\text{rot } \vec{F} = \left( \frac{\partial Z}{\partial y} - \frac{\partial Y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left( \frac{\partial X}{\partial z} - \frac{\partial Z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left( \frac{\partial Y}{\partial x} - \frac{\partial X}{\partial y} \right) \vec{k}$$

или сокращенно

$$\text{rot } \vec{F} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ X & Y & Z \end{vmatrix} = \nabla \times \vec{F}.$$

Можно показать, что условие существования силовой функции для силы  $\vec{F} = X\vec{i} + Y\vec{j} + Z\vec{k}$  можно выразить так:

$$\text{rot } \vec{F} = 0.$$

Векторное поле, для которого ротация равняется нулю, называется потенциальным.

Если рассматриваемые силы обладают силовыми функциями, то геометрическое сложение сил можно заменить алгебраическим сложением соответствующих силовых функций. Особенно это удобно, если рассматриваются взаимодействия не между отдельными материальными точками, а между их системами. Задачи такого вида решены в теории притяжения.

## Часть IV

### МЕХАНИКА XIX в.

---

#### ФРАНЦУЗСКАЯ ШКОЛА МЕХАНИКИ

К середине XVIII в. были заложены основы теоретической механики как для одной материальной точки, так и для системы таких точек, простейшей из которых является твердое тело. Началось дальнейшее развитие теоретической механики: объединение всех ее частей (у Ньютона и Эйлера статика еще оставалась за пределами теоретической механики) и использование ее для других утилитарных целей. Полное развитие этот процесс получил только в XIX в., но начальные стадии относятся уже к XVIII в.

В XVIII в. укрепилось гелиоцентрическое мировоззрение, были заложены твердые основы экспериментального метода; сформировались и две новые науки — механика и оптика. Однако основным фактором развития этих наук были не земные, а как раз небесные потребности — исследовать движение планет и таким образом представить все средства для развития нового мирозерцания. Из земных потребностей чувствовалась только одна, но очень существенная — обеспечение надежности мореплавания в открытом океане. Это обстоятельство сыграло важную роль и в социальной истории Европы.

В XVII в. на историческую сцену выступают Франция, где в эпоху Людовика XIV консолидировалось национальное государство, и Англия, которая от обороны против Испаний переходит к наступлению; ее «джентльмены-пираты» начинают морской разбой в испанских колониях. Наряду с этим производится попытка закрепиться в Индии, которая в это время превосходила любое государство Европы своим богатством, обширностью территории и численностью населения. Кроме того, англичане появились и в Северной Америке, куда и волей, и неволей шло «избыточное» население, и в Вест-Индии, где занимались опорные пункты для пиратства и контрабандной торговли.

В XVII в. католическая Франция и протестантская Англия были в дружеских отношениях для борьбы с общим врагом — Испанией, но к началу XVIII в. положение изменилось: после выпадения Испании из числа великих держав бывшие «союзники» перессорились. В 1688 г. из Англии были окончательно изгнаны дружественные Франции Стюарты и на престол вступил голландский принц Вильгельм Оранский, не забывший попытки Людовика XIV покорить

Голландию. Внешняя политика Англии совершенно изменилась: в 1689 г. началась первая из ряда войн, заполнивших все восемнадцатое столетие и закончившихся только в 1815 г. поражением Наполеона при Ватерлоо.

Некоторые историки называют это время «второй Столетней войной» между Англией и Францией, но, если первая Столетняя война (1337—1453) окончилась победой Франции, то теперь получилось обратное. В XVIII в. в Англии образовался тесный союз между аристократией и буржуазией, полным ходом пошло «первоначальное накопление». Колониальное сырье избавило Англию от утечки золота за границу, а перепродажа сахара, табака, хлопка и индиго другим европейским странам в середине XVIII в. давала более 600 тыс. фунтов стерлингов в год.

Колониальная активность Франции началась несколько позже — в период пребывания у власти кардинала Ришелье. К началу XVIII в. французы располагали несколькими факториями в Индии, островами Мартиникой и Гваделупой и западной половиной Гаити в Вест-Индии, но, самое главное, Франции принадлежали Канада и Луизиана (бассейн Миссисипи) в тылу английских колоний на западном побережье Атлантического океана; поэтому столкновение между Англией и Францией было неизбежно: во всех войнах XVIII в. — за испанское наследство, в Семилетней войне, вплоть до наполеоновских войн — Англия и Франция стояли на противоположных сторонах.

Промышленное производство Англии все время развивалось на протяжении первой половины XVIII в.; в 1750 г. в стране производилось товаров на 40 млн. фунтов стерлингов; шестая часть этих товаров шла за границу. Для поднятия промышленности в 1721 г. был создан закон, запретивший не только ввоз, но и ношение индийских тканей (ситца — по-французски *indienne*), гибельным образом отразившийся на индийской промышленности. «Ситцевый закон» должен был защитить зарождающуюся английскую хлопчатобумажную промышленность и был отменен только через 50 лет, когда индийская конкуренция перестала быть страшной для Англии.

Колониальная политика подготавливала промышленную революцию, которой было суждено после 1760 г. выдвинуть Англию на первое место среди морских держав. С этого времени стали появляться изобретения и усовершенствования рабочих машин, полностью преобразовавшие все процессы производства. Первые машины появились в текстильном производстве и вызвали стремительное развитие этой отрасли промышленности. Во второй половине XVIII в. стала развиваться и тяжелая промышленность. К концу века Англия не только полностью перестала зависеть от ввоза иностранного железа, но сама стала вывозить его за границу в возрастающих количествах; равным образом усилилась и добыча угля. В 80-х годах был изобретен паровой двигатель.

Решающая схватка между Англией и Францией разразилась уже во времена Французской революции. В 1793 г. революционная

Франция, борясь против почти всей феодальной Европы, мобилизовала на защиту родины не только промышленность, но и науку. В 1794 г. была основана Политехническая школа — первое в мире высшее техническое учебное заведение широкого профиля, в работе которого приняли участие выдающиеся математики *Лазар Карно* (1753—1823) и *Гаспар Монж* (1746—1818). Наряду с академическими учеными, продвигавшими дальнейшее теоретическое развитие физико-математических наук, появились ученые нового типа, занятые не столько дальнейшим развитием науки, сколько использованием ее достижений на практике.

Впервые в истории появился специалист-инженер; для подготовки инженеров в большом количестве создавались и новые, более наглядные методы; наряду с аналитиком, представлявшим наиболее распространенный тип ученого-математика XVIII в. после Ньютона и Эйлера, появляются люди, ищущие в науке если и не больше простоты, то во всяком случае больше наглядности: в математике вместе с аналитическим методом появляется снова и геометрический. Зачинателем в этом процессе явился творец начертательной геометрии Гаспар Монж, заменивший вычисления построением.

В это же время разрабатывается «Аналитическая механика» Лагранжа, представляющая завершение начатого Эйлером аналитического метода и не содержащая ни одного чертежа. Оба направления мирно уживались между собой в Политехнической школе, на основе которой выработался господствующий в течение всей первой половины XIX в. французский тип инженера с высокой математической подготовкой, состоящего на государственной службе в качестве специалиста-строителя, военного инженера, геодезиста, инженера путей сообщения и т. д.

Гаспар Монж кроме начертательной геометрии оставил значительный след и в истории механики. Происходящий из незнатных слоев общества, он благодаря своим исключительным способностям добился звания преподавателя военно-технической школы в провинциальном городе Мезьере. Ему принадлежит вышедший в 1786 г. «Элементарный трактат статики», который можно считать первой книгой новой механики. Изложение в нем начинается с закона сложения параллельных сил, за которым излагается закон параллелограмма сил, а также определение равнодействующей плоской системы сил. Затем вводится понятие о моменте. С современной точки зрения определяется момент около точки и около прямой и доказывается теорема Вариньона. Потом излагается определение центра тяжести без помощи математического анализа. Книга заканчивается главой, посвященной теории машин; в качестве простых машин указываются три: рычаг, наклонная плоскость и веревка.

Другим механиком нового направления был ученик Монжа Лазар Карно. По окончании Мезьерской школы он служил в инженерных войсках Франции; в королевской армии он не мог продвигаться несмотря на свои способности и талант инженера. Он выдвинулся лишь после революции и в тяжелый 1793 год был «организатором

ром победы» в борьбе с феодальными интервентами. Вышедшая в 1783 г. его книга «Опыт о машинах вообще» была переиздана в 1797 г., когда Карно был уже членом Директории. Французской республики и за свои научные заслуги избран в члены Национального института, заменившего старую Академию. В 1803 г. книга была переиздана под новым заглавием «Основные принципы равновесия и движения».

В изложении статике Карно пользуется методикой Лагранжа, которая чувствуется и в динамике. Пусть  $m$  — масса рассматриваемой материальной точки, а  $u$  — ее потерянная скорость; произведение  $mu$  можно назвать потерянным количеством движения. Это количество движения теряется в результате действия внутренних сил системы, геометрическая сумма которых должна равняться нулю. Пусть  $U$  — скорость массы  $m$  в каком-либо виртуальном движении системы, а  $(u, U)$  — угол между обеими скоростями  $u$  и  $U$ ; в таком случае

$$\sum muU \cos (u, U) = 0.$$

Такой вид имеет основное уравнение движения Карно. Выбирая виртуальную скорость  $U$  произвольно, можно получить теорему о движении центра тяжести или теорему моментов вокруг неподвижной оси. Так как рассматривается количество движения, то основное уравнение особенно удобно для использования в теории удара. Из него можно получить уравнение, выражающее сохранение количества движения при ударе, а также поскольку удар, рассматриваемый Карно, является абсолютно неупругим и левая часть его уравнения имеет размерность кинетической энергии, то в результате получается известная теорема Карно: потеря кинетической энергии при абсолютно неупругом ударе равна кинетической энергии, соответствующей потерянным скоростям.

Родоначальником геометрического направления в «Механике» является Луи Пуансо (1777—1859).

В 1794 г. семнадцатилетний Пуансо, бывший ученик одного из парижских колледжей, решил поступить в Политехническую школу, хотя его математические познания не были особенно блестящими: с арифметикой он познакомился еще в колледже, а геометрию сумел самостоятельно выучить во время подготовки к вступительным экзаменам. После окончания Политехнической школы он посвятил себя механике, и в 1803 г. вышло первое издание его «Элементов статике». Он определял силу как некоторую причину движения, действующую в точке своего приложения, следуя некоторому направлению и имея некоторую величину.

Силу, которую Лагранж задавал тремя проекциями на оси  $X$ ,  $Y$ ,  $Z$ , он обозначал буквами  $P$ ,  $Q$ ,  $R$ ,  $S$  и т. д., помещенными на прямых, изображающих их направление; если некоторая буква, например  $A$ , показывает точку приложения силы, например  $P$ , то надо предполагать, что действие этой силы идет от  $A$  к  $P$ , или что сила тянет от  $A$  к  $P$ .

Для современного обозначения силы не хватает только стрелки. В XVIII в. момент силы имел лишь числовую величину и знак; Пуансо же дает геометрическое изображение момента в виде пары сил и устанавливает правила преобразования и сложения пар.

Последним механиком, в работах которого астрономия играла исключительно большое значение, был Лаплас. Если в XVIII в. математик, механик и астроном очень часто соединялись в одном лице, то в XIX в. ученые стали работать каждый преимущественно в одной области физико-математических наук. Механика стала искать импульсы для своего развития в других областях — это была физика и техника.

Основными чертами теоретической механики XVIII в. были следующие. Во-первых, ее математичность: все законы механики и ее основные положения выводились методами математического анализа; Лагранж утверждал даже, что его механика представляет новую главу математического анализа. Во-вторых, основные положения не уточнялись физически: что такое сила — оставалось неопределенным, и философски мыслящие механики вроде Д'Аламбера даже стремились по возможности обходиться без этого понятия. Связи предполагались идеальными: опорные поверхности без трения, стержни и нити — не имеющими веса; если вес нити учитывался, то она считалась вполне однородной и абсолютно гибкой; даже у такого механика, как Пуансо, в его статике нет ни малейшего упоминания о трении.

В действительности дело обстояло совсем не так просто: надо было придумывать не общие, а более частные и удобные методы для решения задач, учитывать расхождение между идеальными и действительными телами. Все это потребовало большой работы, скорее наблюдательной, чем вычислительной, определения поправочных коэффициентов и установления физического характера различных тел. Это была нужная, но все же не чисто научная работа; нужно было различать две стороны: приложимость уравнений теоретической механики к решению технических задач и обратное влияние техники на формирование методов теоретической механики. Окончательный результат заключается в том, что наряду с теоретической механикой в XIX в. появляется и прикладная — техническая или индустриальная механика.

Термин «индустриальная механика» принадлежит *Жану Виктору Понселе* (1788—1867). Родившийся в г. Меце, который в качестве пограничной крепости был своего рода центром военно-инженерного дела (так же как и Мезьер), Понселе после окончания Политехнической школы поступил в армию и в 1812 г. участвовал в походе на Россию. Тяжело раненный, он попал в плен и до 1814 г. жил в Саратове. Занимаясь на досуге наукой, он сначала занялся математикой и написал «Трактат о проективных свойствах фигур», законченный по возвращении на родину и напечатанный в 1822 г. Этот трактат создал эпоху в истории математики: разработанные в XVIII в. аналитические методы сменяются геометрическими. В 1815 г. он был преподавателем военной школы (в частности, он

ввел в этой школе употребление русских счетов, с которыми он познакомился в плену; во Франции в это время вычисления производились обычно «на бумажке»).

К механике он обратился после того, как военный министр предложил ему ввести в Мецской артиллерийско-инженерной школе курс практической механики и взять на себя преподавание этого предмета. Понселе написал сначала «Курс механики, примененный к машинам», а затем более элементарно изложенное «Введение в индустриальную физическую или экспериментальную механику», написанное на основании его лекций.

Вторым представителем этого направления был автор известных кинематических теорем *Мишель Шаль* (1793—1880) — тоже ученик Политехнической школы. Основные его произведения относятся к области геометрии. Наиболее известны его книги «Исторический обзор о происхождении и методах в геометрии, в частности, относящихся к современной геометрии» и «Курс высшей геометрии». В теоретической механике с именем Шалья связаны две теоремы: о мгновенном центре скоростей и винтовом движении твердого тела.

*Гаспар Кориолис* (1792—1843) родился в Провансе. В 1812 г. он окончил Политехническую школу со званием инженера путей сообщения. В 1817 г. он поступил в эту школу преподавателем механики, потом стал в ней экзаменатором и, наконец, директором. Основным его произведением является «Курс механики твердых тел и расчета мощностей машин» (1829); носящая его имя теорема дана в «Исследовании о приложении принципа живых сил в относительных движениях системы тел». На русский язык переведен его любимый труд «Математическая теория явлений бильярдной игры», где он поставил задачу о движении шаров по плоскости при наличии трения и дал изящные и остроумные аналитические и графические решения этой задачи.

Поскольку техника неразрывно связана с экономикой, то в индустриальной механике на первый план выдвинулось понятие работы. Эффект движущей силы и способов ее получения из источника силы — «двигателя» — можно оценить. Эта оценка связана с понятием о работе и о мощности. То, что раньше называлось «виртуальным моментом силы» и т. д., теперь получило название (Понселе и Кориолис) «работы»; упомянутые авторы подчеркнули экономическое значение работы: «Работа есть то, что оплачивают». В связи с этим Кориолис предложил живую силу выражать не как  $mv^2$  согласно терминологии Лейбница в XVIII в., а как теперь обычно принято:  $\frac{1}{2}mv^2$ .

Так как индустриальная механика предназначалась для практиков, то необходимо было дать наиболее точную формулировку основных понятий и установить наиболее удобные методы. Это прежде всего касалось движущегося объекта. В XVIII в. его называли телом, не устанавливая, что это такое — отдельная молекула, геометрическая точка или же тело очень солидных размеров, вроде планет Солнечной системы. В связи с этим еще у Эйлера разработа-

лось понятие о материальной точке. Под этим понятием подразумевалось тело настолько малых размеров, что можно было пренебречь разницей в движении его частей (кинематическое определение), или же такое тело, что вследствие небольших его размеров можно было считать все силы приложенными в одной геометрической точке (статическое определение).

Вторым понятием, которое тоже установил Эйлер, было понятие об абсолютно твердом теле. Оно было необходимым условием для возможности введения аксиомы, что две равные и противоположные силы, имеющие одну линию действия, взаимно уравниваются, будучи приложены к одному твердому телу. Такие две силы растягивают или сжимают тело, к которому они приложены, и даже могут его разорвать, но если не нужно создавать особой механики для различного рода материалов (дерева, камня, металлов), то следует предположить, что на рассматриваемом теле уравниваются любые две равные и прямо противоположные силы. Геометрическое определение абсолютно твердого тела требует неизменности расстояний между его точками; в статике существенной является именно возможность уравнивания на нем двух равных и прямо противоположных сил; тогда всякое тело можно считать абсолютно твердым, если действующие на него силы не превосходят некоторого предела. Получающиеся от действия сил деформации бывают настолько малыми, что можно пренебречь геометрическими изменениями размеров и формы тела, но физическую сторону — существованием в данном теле различных усилий — при этом пренебрегать нельзя.

Уже очень давно было отмечено, что результат действия сил на тело зависит не только от величины этой силы и веса тела, но и от сопротивления движения, в частности от силы трения.

Первым обратившим внимание на эту силу трения был Леонардо да Винчи, считавший, что в случае движения по горизонтальной плоскости сила трения равняется 25% от веса движущегося тела. Дальнейшие исследования были проведены Амонтоном (1663—1705) и затем Кулоном (1736—1806), который вывел законы трения скольжения. Нужно отметить, что величина силы трения определяется не из уравнений, а из неравенств; поэтому возможны случаи, когда и положение равновесия и соответствующая величина силы трения остаются неопределенными и тоже будут зависеть от начальных условий загрузки.

Задача на опытное определение коэффициентов трения различных тел, а также исследование его изменения в различных условиях относятся тоже к области индустриальной механики. Нельзя признать окончательно выясненным даже определение зависимости коэффициента трения от скорости движения тела. В основном величина коэффициента трения уменьшается при увеличении скорости движения тела; например, для остановки поезда нельзя давать сразу тормоз до отказа, чтобы прекратить вращение колес, так чтобы их скорость скольжения равнялась скорости движения поезда; при постепенном торможении, уменьшающем скорость сколь-

жения, поезд проходит до остановки значительно меньшее расстояние, чем при торможении до отказа.

Статика абсолютно твердого тела не позволяет решить все задачи на равновесие. Классическим примером является задача на определение опорных реакций стола на четырех ножках, стоящего на гладкой горизонтальной плоскости, под действием груза, лежащего на доске стола в какой-либо точке, отличной от ее середины. В геометрической статике имеется всего лишь три уравнения для определения четырех неизвестных. Недостающее уравнение можно получить, если рассматривать ножки стола как упругие стержни, могущие сжиматься под действием наложенного груза и опорных реакций ножек; так как величины деформаций ножек пропорциональны действующим силам (реакциям ножек), то, если найти соотношение между перемещениями концов всех четырех ножек, можно получить недостающее четвертое уравнение.

Полное решение задач на равновесие сил, приложенных к твердым телам, требует знания упругих свойств этих тел. Таким образом, появляется еще раздел индустриальной механики, который носит название «Соппротивление материалов». Его необходимость была установлена еще Галилеем в «Беседах и математических доказательствах относительно двух новых наук». Одной из новых наук было учение о движениях в отношении места, т. е. о свободном падении и параболическом движении брошенных тяжелых тел, а второй наукой — как раз та, которую называют теперь «Соппротивление материалов».

Следующий шаг в ее развитии был сделан Робертом Гуком (1635—1708), английским математиком и физиком эпохи Ньютона и Гюйгенса.

Гук оставил после себя шифрованный список открытых им законов, полностью не раскрытых до сих пор; в числе их имеется и известный под его именем закон действия упругих сил, «ut tensio sic vis» («упругая сила пропорциональна удлинению»); этот закон и лег в основание учения о сопротивлении материалов.

Когда в XIX в. «Соппротивление материалов» превратилось в «Строительную механику», то в ней наряду с аналитическими методами стали пользоваться и графическим. Возобновляется употребление веревочного многоугольника Вариньона. Из новых способов наиболее интересным является метод расчета ферм при помощи диаграмм Кремоны (Луиджи Кремона, 1830—1903).

Основную идею этого способа предложил знаменитый английский физик Клерк Максвелл (1831—1872). Она истекает из характерного для геометрии XIX в. установления взаимных соответствий между элементами двух фигур. В методе Кремоны — Максвелла такими фигурами были: одна — чертеж рассматриваемой фермы, а другая — диаграмма усилий, получающихся в ее стержнях под действием вносимых нагрузок. Точке (узлу) первой фигуры соответствовала площадь на другой, периметр которой состоял из отрезков, параллельных направлениям стержней, сходящихся в данном узле; и обратно: точке второй фигуры (диаграммы) соответ-

ствовала взятая на чертеже фермы площадь, обходящаяся стержнями фермы. Между прямыми на обеих фигурах соответствие устанавливается тем, что прямой (стержню) фермы отвечает параллельный отрезок, дающий величину усилия в этом стержне.

## ЛУИ ПУАНСО. ГЕОМЕТРИЧЕСКАЯ СТАТИКА

Наиболее ярким представителем новой французской механики был Луи Пуансо. Основным его произведением является книга «Начала статики», выпущенная в 1802 г. и переиздававшаяся многократно (10-е издание вышло в 1861 г.). В статике это произведение сыграло ту же роль, что «Начала» Ньютона в динамике.

«Начала статики» Пуансо начинаются с «Введения». Здесь указывается на основное понятие, которое имеется о телах, — это то, что для существования в них не предполагается необходимости движения. И если возможно, что во Вселенной не найдется ни одной молекулы, которая находилась бы в абсолютном покое даже в очень короткий промежуток времени, тем не менее совершенно ясно, что тело может существовать, находясь в покое.

Но если это тело будет в покое хотя бы одно мгновение, то оно всегда таким и останется, если только какая-нибудь посторонняя причина не выведет его из этого состояния. Эту причину, какой бы она ни была и которая известна только по ее действиям, называют силой, или мощностью.

Итак, *сила есть какая-то причина движения.*

Пуансо указывает, что сила обладает точкой приложения, величиной и направлением, и формулирует основные задачи механики: найти движение, которое какая-либо механическая система получает под действием заданных сил, и обратно: найти соотношения сил, действующих на систему, чтобы она получила заданное движение.

Но для решения этой общей задачи нужно начать с частного случая — решить, какими должны быть соотношения сил, приложенных к системе, чтобы она получила движение, равное нулю, иными словами, находилась бы в равновесии. Если эта задача будет решена, то к ней легко будет привести и другую; вот почему обычно изучение механики начинают со статики, которую определяют как науку о равновесии сил.

После этого наступает черед другой науки, которая рассматривает все вопросы, касающиеся движения тел; она называется динамикой, или наукой о движении.

Основное отличие статики от динамики заключается в том, что в решении статических задач достаточно знать только величины и направления приложенных сил, тогда как в динамике требуется, кроме того, знание и некоторых дополнительных данных. В то время кинематика еще не существовала как самостоятельная наука, и Пуансо считает возможным установить различие между равновесием и покоем в том, что на покоящееся тело не действуют никакие силы, тогда как в равновесии на тело действуют взаимоничтожаю-

щиеся силы. Он не считает это различие существенно важным, что позволяет ему установить следующую аксиому: состояние тела, находящегося в покое или подверженного действию некоторых сил, не изменится, если предположить, что к этому телу приложены какие угодно новые силы, которые взаимно уравниваются между собой.

Когда рассматривается равновесие свободного твердого тела, то достаточно знать лишь координаты точек приложения сил, величины сил и направляющие косинусы линий их действия; объем и форма рассматриваемого тела уже значения не имеют. Если это тело не является свободным, то его всегда можно сделать таковым, отбросив сопротивления и заменив их подходящими силами. Таким образом, Пуансо вводит в науку понятие о реакции связей и так называемую аксиому связей. В этом заключается отличие статики Пуансо от статики Лагранжа.

Если на тело действует система сил, находящихся взаимно в равновесии, то можно считать, что одна из них  $P$  уравнивает все остальные, вместе взятые. Если приложить к телу одну силу  $P'$ , равную и прямо противоположную  $P$ , то силы  $P$  и  $P'$  взаимно уравниваются. Поскольку же  $P$  уравнивается со всей системой приложенных сил, то сила  $P'$  и совокупность всех остальных сил являются эквивалентными друг другу.

Таким образом, можно поставить общий признак эквивалентности двух систем сил: они эквивалентны, если каждая из них в отдельности может быть уравновешена одной и той же третьей системой сил. Пуансо рассматривает только частный случай эквивалентности, когда эта третья система представляет единственную силу. Таким образом, Пуансо вводит понятие о равнодействующей данной системы сил и об операциях сложения и разложения сил.

Книга «Начала статики» разделяется на четыре главы. Первая глава посвящена основам статики. Прежде всего рассматриваются сложение и разложение сил. В качестве основных аксиом устанавливается, что две равные и прямо противоположные силы находясь в равновесии, будут ли они приложены к одной точке или к одному телу в точках, лежащих на одной прямой, совпадающей с линией действия этих сил. Отсюда получается возможность перенесения точки приложения силы по линии ее действия. В качестве основной аксиомы принимается, что две силы  $P$  и  $Q$ , действующие по одной прямой и в одном направлении, в результате сложения дают равнодействующую, равную  $P + Q$ , направленную по той же прямой; отсюда выводится правило сложения сил, действующих по одной прямой.

Затем приводятся доказательства сначала для сложения параллельных сил, а потом для сходящихся сил (параллелограмм и параллелепипед сил). После этого Пуансо рассматривает пары сил, правила их перенесения и сложения.

Таким образом, Пуансо дает графическое изображение момента силы, который до него представлялся в виде алгебраической величины. Он представляет момент пары в виде вектора, имеющего

величину и направление и перпендикулярного к плоскости соответствующей пары. Эта глава заканчивается общим случаем сложения любой пространственной системы, т. е. изложением так называемого метода Пуансо — приведения системы к силе и к паре, плоскость которой перпендикулярна к силе, а также понятием о центральной оси. В качестве частных случаев разбираются условия равновесия заданной системы сил, а также условия, при соблюдении которых данная система сил, не находящаяся в равновесии, может быть заменена одной равнодействующей силой.

Вторая глава «Об условиях равновесия» начинается с условий равновесия параллельных сил, лежащих в одной плоскости, а затем расположенных и в пространстве. Условия равновесия приводятся в таком виде:

$$P_1 + P_2 + P_3 + \dots = 0;$$

$$P_1x_1 + P_2x_2 + P_3x_3 + \dots = 0;$$

$$P_1y_1 + P_2y_2 + P_3y_3 + \dots = 0.$$

Последние два уравнения выражают условия равенства нулю моментов пар, разложенных по направлению осей  $Ox$  и  $Oy$  (предполагается, что направление сил совпадает с направлением оси  $Oz$ ). Затем рассматриваются условия равновесия плоской системы сил, причем уравнение моментов дается в формуле

$$\Sigma (Xy - Yx) = 0.$$

В аналогичной форме даются уравнения моментов и в случае пространственной системы сил, где составляющие моменты пар по координатным осям получают общепринятые обозначения  $L$ ,  $M$ ,  $N$ , а также условие существования равнодействующей в известной форме

$$LX + MY + NZ = 0.$$

Глава заканчивается разделом, в котором дается определение условий равновесия тела, имеющего одну и две точки опоры или опирающегося на неподвижную плоскость. Новым элементом является определение опорных реакций в этих трех случаях, или, если пользоваться терминологией Пуансо, давлений в опорных точках, причем подробно дискутируется случай статической неопределимости для тела, имеющего две неподвижные точки опоры.

Третья глава посвящена теории центров тяжести. Вес тела рассматривается тоже как некоторая сила, обладающая величиной и направлением; центр тяжести рассматривается не как особая точка приложения веса тела, а как центр параллельных сил — точка, через которую проходит направление силы веса тела (равнодействующей весов частиц тела), при любых положениях тела по отношению к горизонтальной плоскости. Далее даются общие формулы для нахождения центра тяжести тел и определяются центры тяжести фигур и тел для случаев, когда можно обойтись без интегрального исчисления.

Последняя глава называется «О машинах». Пуансо дает сна-

чала обычное в его время определение машины как инструмента, предназначенного для передачи действия сил, и затем заменяет его более точным с его точки зрения: машины представляют не что иное, как тела или системы тел, стесненные в своих движениях какими-нибудь препятствиями.

В зависимости от этих препятствий он классифицирует машины: рычаг (одна точка опоры), вóрот (наличие неподвижной прямой) и наклонную плоскость (наличие неподвижной опорной плоскости); классификация тесно связана с рассматриваемыми во второй главе случаями равновесия несвободного тела. При этом он отбрасывает полностью силы трения, а также жесткость веревок, рассматривая их как гибкие и нерастяжимые нити. Он дает основные положения для определения условий равновесия системы тел, которые сводятся к двум:

1. Если какая-либо система точек находится в равновесии, то должна находиться в равновесии каждая точка этой системы под действием как непосредственно приложенных к ней сил, так и тех реакций, которые она испытывает со стороны других точек этой системы.

2. Две точки могут действовать одна на другую только по направлению прямой, соединяющей эти точки, причем действие всегда является равным и противоположным противодействию.

Определение условий равновесия сводится к определению сопротивлений (реакций), получающихся при взаимодействии отдельных точек системы; если эти сопротивления известны, то остается лишь комбинировать эти силы взаимодействия с теми, которые непосредственно даются условиями задачи (внешними силами), применяя к каждому телу условия равновесия, если бы оно было совершенно свободным.

Такой подход к определению машины объясняется непосредственно следующим в тексте Пуансо примером. Он разбирает так называемую веревочную машину (веревочный многоугольник). Сначала исследуется случай, когда на узел веревки действует некоторая сила и определяются по правилу силового треугольника натяжения обеих частей веревки; затем берется случай, когда действующая сила приложена не к самой веревке, а к гладкому кольцу, могущему перемещаться по веревке, так что натяжение обеих частей веревки оказывается одинаковым. После этого разбирается случай веревочного многоугольника  $ABCD$ , на вершины которого действуют заданные силы; когда стороны  $AB$ ,  $BC$ ,  $CD$  становятся бесконечно малыми, то получается находящаяся под непрерывно распределенной нагрузкой гибкая нить, форма равновесия которой и возникающие натяжения и определяются.

Уравнения цепной линии в окончательной форме Пуансо не дает: он определяет ее тем свойством, что тангенс ее наклона к горизонтали возрастает пропорционально длине дуги, отсчитываемой от ее наинизшей точки.

Нужно отметить, что, хотя Пуансо дал геометрическое изображение момента силы, векторного определения момента он не дает.

Это было сделано *Августином Коши* (1789—1867), который определил линейный момент силы относительно точки как удвоенную величину площади треугольника, образованного центром момента и силой; вектор, изображающий величину этой площади, откладывался перпендикулярно к плоскости треугольника в ту сторону, с которой периметр его представлялся обходящимся в положительном направлении вращения. Эта величина физического значения не имеет, но ее проекция на любую ось имеет физическое значение, представляя момент рассматриваемой силы относительно этой оси. Этот момент Пуансо определяет при помощи проекции силы на плоскость, перпендикулярную к оси: проекция умножается на длину перпендикуляра, опущенного на нее из точки пересечения оси с плоскостью.

Книга заканчивается кратким перечислением наиболее употребительных машин, условия равновесия в которых устанавливаются отношением движущей силы (*puissance*) к побеждаемому ею сопротивлению (*résistance*), — методика, представляющая известную еще в древности начальную форму принципа возможных перемещений.

При помощи пар Пуансо дает объяснение «парадокса Роберваля», который не получил в то время истинного объяснения. Этот «парадокс» представляет хорошо известные в настоящее время весы Роберваля. В XVIII в. его пытались разрешить при помощи некоторого разложения сил; свое объяснение Пуансо считает «быть может единственным правильным из всех, которые до сих пор давались»; принцип возможных перемещений дает наиболее простое объяснение без всяких вычислений, если разобрать кинематически перемещения всех деталей механизма.

Основное понятие статики Пуансо, а именно изображение момента силы в виде пары, было перенесено и в область динамики. Момент некоторой силы относительно центра *O* можно изобразить удвоенной площадью треугольника, вершина которого находится в точке *O*, а основанием является рассматриваемая сила. Это построение Пуансо сопоставляет с другим, рассматриваемым в теории движения точки под действием центральных сил, где определяется секторная скорость  $\frac{1}{2}r^2d\varphi/dt$  точки; ее производная по времени, умноженная на массу точки, дает величину момента тангенциальных сил, приложенных к точке, движущейся вокруг полюса *O*. Сопоставив эти выражения, Пуансо обращает внимание на введенную Лапласом «неизменяемую плоскость» Солнечной системы, к которой должен быть перпендикулярен общий момент количеств движения всех планет системы. Пуансо указывает, что в своих расчетах Лаплас не обратил внимания на моменты количеств движения от вращения планет вокруг собственной оси — моменты, величину которых Пуансо определяет как произведение момента инерции планеты во вращении вокруг своей оси на угловую скорость этого вращения. В настоящее время эти моменты получили название кинетических моментов и стали выражаться формулой  $J\omega$ . Название «кинетический момент» Пуансо не употребляет, но приведенное вы-

ражение он раскладывает по главным осям инерции  $Ap, Bq, Cr$ . У Эйлера встречаются только эти разложения; общего выражения  $J\omega$  он не знает: существенная разница между аналитиком Эйлером и геометром Пуансо.

Кинетическим моментом Солнечной системы Пуансо начал заниматься с 1828 г.; в его мемуаре «Новая теория вращения тел» (1834) он прибегает исключительно к геометрическим методам и вводит понятия об эллипсоиде инерции. Движущееся тело он заменяет эллипсоидом, центр которого находится в центре тяжести тела, а мгновенные угловые скорости по величине и направлению изображаются прямыми, соединяющими центр эллипсоида с точками на его поверхности; плоскость действующей пары совпадает с касательной плоскостью к эллипсоиду, проведенной через конец радиуса, изображающего соответствующую угловую скорость. Мемуар Пуансо не содержит ни формул, ни чертежей; изложение разобранного в нем случая Эйлера — Пуансо (движение тела с одной закрепленной точкой без действия сил) приведем в современном виде, пользуясь обозначениями Эйлера.

Пусть  $A, B, C$  и  $p, q, r$  — соответственно моменты инерции относительно главных центральных осей и проекции на них мгновенной угловой скорости тела.

Динамические уравнения Эйлера имеют вид

$$A \frac{dp}{dt} - (B - C) qr = Q_x;$$

$$B \frac{dq}{dt} - (C - A) rp = Q_y;$$

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq = Q_z,$$

где  $Q_x, Q_y, Q_z$  — проекции на подвижные координаты оси момента внешних сил.

Уравнения Эйлера можно вывести непосредственно при помощи теоремы Резаля из выражения для полной произвольной по времени от кинетического момента  $J\omega$ .

$$\bar{Q} = \frac{d}{dt} (J\omega)^*.$$

Рассмотрим случай, когда моменты внешних сил равны нулю (так называемый случай Эйлера — Пуансо). При отсутствии действующих сил кинетическая энергия тела сохраняет постоянное значение:

$$Ap^2 + Bq^2 + Cr^2 = \text{const.}$$

Точно так же остается постоянным по величине и направлению кинетический момент  $\bar{K}_0$  относительно начала координатных осей — неподвижной точки. Его величина определяется выражением

$$K_0^2 = A^2 p^2 + B^2 q^2 + C^2 r^2.$$

\* В. Л. Кирпичев. Беседы по механике. М. — Л., ГТТИ, 1933. Изд. 6. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.

Принимаем, что кинетический момент приложен в неподвижной точке  $O$ ; его направление все время остается постоянным. От той же точки  $O$  откладываем и векторы угловой скорости  $\vec{\omega} = p\vec{i} + q\vec{j} + r\vec{k}$ . Выражение для кинетической энергии можно рассматривать как скалярное произведение векторов кинетического момента и угловой скорости. Так как величина кинетического момента постоянна, то это значит, что проекция вектора угловой скорости на направление кинетического момента — постоянная величина. Отложим эту величину от точки  $O$  по направлению кинетического момента и через конец этого отрезка проведем плоскость, перпендикулярную к направлению кинетического момента: получаем, что конец вектора угловой скорости, отложенного от точки  $O$ , всегда находится на этой плоскости.

Теперь можно найти и другую поверхность, на которой должен находиться конец вектора угловой скорости. Уравнение эллипсоида инерции для точки  $O$  имеет вид

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = k^2.$$

Так как эту поверхность можно построить в каком угодно масштабе, то его следует выбрать так, чтобы  $x = p$ ,  $y = q$  и  $z = r$ . На этой поверхности находится конец вектора угловой скорости. Но направление вектора, имеющего начало в неподвижной точке, определяется двумя координатами и для его определения получены два условия. Так как конец этого вектора находится на двух поверхностях и задача его нахождения должна для каждого момента времени иметь однозначное решение, то это значит, что конец рассматриваемого вектора находится в точке касания обеих построенных поверхностей — плоскости и эллипсоида.

Это обстоятельство позволяет дать геометрическое истолкование рассматриваемому движению; его можно воспроизвести, заставив соединенный с телом эллипсоид инерции катиться без скольжения по плоскости, перпендикулярной к направлению кинетического момента. Поскольку кинетический момент остается постоянным по величине и направлению, то это качение по плоскости вокруг неподвижной точки  $O$  происходит все время в одном направлении, но не обязательно с одинаковой скоростью. Точка касания эллипсоида с плоскостью перемещается как по плоскости, так и по поверхности эллипсоида; кривую, описанную на плоскости, Пуансо назвал герполодией (от греческого *herpein* — ползать), а кривую на поверхности эллипсоида — полодией.

Таким образом, сформулирована теорема: движение твердого тела с неподвижной точкой, происходящее без действия сил, можно воспроизвести при помощи качения без скольжения соединенной с телом кривой — полодии — по неподвижной кривой на плоскости — герполодии.

Рассмотрим еще один частный случай. Предположим, что эллипсоид инерции движущегося тела является симметричным вокруг оси  $Oz'$ . Тогда моменты инерции  $A$  и  $B$  должны быть равны,

и третье из уравнений Эйлера

$$C \frac{dr}{dt} - (A - B) pq = Q_z$$

принимает вид

$$C \frac{dr}{dt} = 0,$$

откуда  $Cr = \text{const}$ . Это значит, что проекция кинетического момента на ось симметрии тела  $Oz'$  является величиной постоянной (так же, как и угловая скорость  $r$ ). Так как направление неподвижных осей координат можно выбирать совершенно произвольно, то пусть неподвижная ось  $Oz$  совпадает с направлением тоже постоянного кинетического момента. Но угол между подвижной и неподвижной осями  $Oz$  и  $Oz'$  есть угол нутации; это показывает, что угол нутации остается во время движения постоянным и угловая скорость  $\dot{\Theta} = 0$ . В таком случае первые два кинематических уравнения Эйлера принимают вид

$$p = \dot{\psi} \sin \varphi \sin \Theta;$$

$$q = \dot{\psi} \cos \varphi \sin \Theta,$$

откуда

$$p^2 + q^2 = \dot{\psi}^2 \sin^2 \Theta.$$

При  $A = B$  интеграл кинетической энергии принимает вид

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 = \text{const},$$

откуда  $p^2 + q^2 = \text{const}$ , следовательно, угловая скорость  $\dot{\psi}$  прецессии постоянна. В таком случае третье кинематическое уравнение Эйлера  $r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \Theta$  показывает, что и скорость  $\dot{\varphi}$  собственного вращения тела является постоянной. Получающееся движение тела носит название регулярной прецессии.

Свободное твердое тело может вращаться без закрепления, если ось вращения — так называемая свободная ось — совпадает с одной из главных центральных осей эллипсоида инерции. Определим, является ли такое вращение устойчивым, т. е. будет ли оно удерживаться, если на движущееся тело действуют небольшие случайные возмущения.

Для этого рассмотрим движение тела, совершающееся вокруг центра тяжести, который в таком случае можно считать закрепленной неподвижной точкой. При заданном режиме движения полого можно рассматривать как геометрическое место последовательных положений конца вектора угловой скорости на эллипсоиде инерции, которым можно заменить вращающееся тело. Назовем этот конец полюсом; при качении пологии по герполодии этот полюс перемещается по поверхности эллипсоида: следовательно, изменяется и его вращение. Расстояние от центра эллипсоида инерции (закрепленной точки тела) до неподвижной плоскости, по которой происходит качение, будет равно проекции угловой скорости на направ-

ление кинетического момента. Изменяя эти расстояния, получаем и различные траектории полюса, а следовательно, и различные полодии. Находить их можно и аналитически, определяя линию пересечения конуса угловых скоростей с поверхностью эллипсоида, но их можно определять и непосредственно из опыта, заставляя эллипсоид катиться по неподвижной плоскости, аналогично тому, как происходит в кинематике плоского движения, непосредственно вычерчивая подвижную и неподвижную centroиды. Такой «опытный» путь построения полодий позволяет качественно определить характер описываемого движения.

Начнем с простейшего случая, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения. В таком случае пределы изменения высоты центра эллипсоида над неподвижной плоскостью определяются длинами полуосей эллипсоида. Предположим для конкретности, что эллипсоид является вытянутым. Тогда, если высота центра равна большей полуоси, то и полодия, и герполодия обратятся в точку. Если опускать центр эллипсоида, то полодии представят окружности, радиусы которых постепенно увеличиваются от нуля до величины, равной длине оставшейся полуоси.

В общем случае рассмотрим эллипсоид так, чтобы самая большая ось была направлена вниз, самая малая — горизонтальна, а средняя — перпендикулярна к плоскости чертежа. Поставим сначала эллипсоид на большую полуось; соответствующая полодия является точкой. При опускании центра эллипсоида полодии уже не будут окружностями, но наивысшая точка все больше и больше приближена к концу средней полуоси и полодия превращается в совокупность двух пересекающихся линий, которые переходят и в верхнюю часть поверхности эллипсоида. Эти две линии представляют предельные положения полодий, которые мы получили бы, если бы начали их строить начиная с концов оставшихся большой и малой полуосей.

Но полодия представляет линию, по которой полюс перемещается свободно и без действия каких-либо посторонних случайных воздействий. Таким образом, видно, что устойчивое движение получается при вращении вокруг наибольшей и наименьшей из главных осей, ибо для них полодия обращается в точку; вращение же вокруг средней оси не может быть устойчиво, так как полюс может двигаться по любой ветви полодии, выходящей из точки, совпадающей с концом средней полуоси. Что касается случая, когда эллипсоид инерции является эллипсоидом вращения, то устойчивое вращение может происходить только вокруг одной оси — оси симметрии рассматриваемого эллипсоида, независимо от того, является ли она наибольшей или наименьшей.

Второй случай, когда уравнения движения твердого тела можно проинтегрировать, был установлен Лагранжем. Это случай симметричного тяжелого тела, ось симметрии которого проходит через неподвижную точку. Он получил большое практическое применение и рассматривается в специальной отрасли механики — так называемой гироскопии.

Пусть ось  $z$  неподвижной системы координат вертикальна, ось  $z'$  подвижной системы — ось симметрии тела, а  $h$  — расстояние от центра тяжести до неподвижной точки. В таком случае можно получить три первых интеграла.

1. Момент внешних сил (тяжести) равен нулю относительно оси симметрии гироскопа; соответствующий интеграл рассмотрен выше: он сводится к тому, что составляющая угловой скорости  $r$  вокруг оси  $Oz'$  остается постоянной:

$$r = \dot{\varphi} + \dot{\psi} \cos \Theta = \text{const.}$$

2. Второй интеграл получаем, приняв, что проекция кинетического момента на вертикальную ось  $z$  постоянна; нужно заметить, что здесь постоянна не кинетический момент, как в случае Пуансо — Эйлера, а только его проекция на вертикаль:

$$A(p \cos \varphi + q \sin \varphi) \sin \Theta + Cr \cos \Theta = \text{const.}$$

3. Третий интеграл получаем из теоремы кинетической энергии:

$$A(p^2 + q^2) + Cr^2 + 2mgh \cos \Theta = \text{const.}$$

Интеграцию можно довести до конца, но только в так называемых эллиптических функциях.

## ВЫДЕЛЕНИЕ КИНЕМАТИКИ В САМОСТОЯТЕЛЬНУЮ НАУКУ

Кинематические задачи с успехом решались еще Евдоксом в IV в. до н. э. (и это были совсем не простые задачи), астрономы во времена Птолемея решали задачи о сложении вращательных движений и знали, что так называемая «пара вращений» эквивалентна круговому поступательному движению. Просматривая «О вращении небесных сфер», можно найти целый ряд искусных кинематических построений, которые применял Коперник для воспроизведения механизма планетных движений. Однако все эти построения были забыты, и даже такой коперниканец, как Галилей, не представлял себе разницы между круговым поступательным движением и настоящим вращением вокруг подвижной или неподвижной оси.

В XVIII в. решались задачи, которые в настоящее время помещаются в начале курса кинематики; при решении задач на кинематику точки для нахождения траекторий, скоростей и ускорений движущихся точек нужно составлять уравнения, дифференцировать их, исключать неизвестные и т. д.; при переходе, казалось бы, к более сложному отделу — кинематике твердого тела — весь предшествующий математический аппарат исчезает: дифференцировать уже больше не нужно, а скорости и ускорения определяются чисто геометрическим методом.

Эта двойственность объясняется тем, что первая часть кинематики — изучение движения точки — разрабатывалась Эйлером в его

«Механике точки», когда динамика еще только создавалась и в кинематике как самостоятельной науке еще не было надобности. Когда же Эйлеру пришлось заниматься динамикой твердого тела, то положение изменилось. В мемуаре 1775 г., непосредственно продолжающем его «Теорию о движении абсолютно твердых тел», он писал так.

Если нужно определить движение какого-либо твердого тела, то все исследование удобно разделять на две части — геометрическую и механическую. В первой части нужно рассматривать только перемещение тела из данного положения в другое, не обращая внимания на основные законы движения, представляя это перемещение при помощи аналитических формул, могущих определить положение отдельных точек после перемещения их из начального положения. Таким образом это исследование относится единственно к области геометрии, или, скорее, стереометрии.

Легко понять, что если это исследование отделить от второй части, которая собственно и относится к механике, то само определение движения при помощи основных его законов можно выполнить значительно легче, чем в том случае, когда обе части этого исследования производятся совместно.

Такие же мысли были и у Д'Аламбера, который думал о полезности изучения движения, отвлекаясь от его причин. С точки зрения техники тот же вопрос выдвигал и Монж, который даже ставил задачу о классификации механизмов, а также Карно.

В 1818 г. эту же идею высказал польский математик и философ Гёне (Ноене) Вронский, который даже назвал новую науку «Форономия». Термин «кинематика» был дан Ампером в его «Опыте классификации человеческих знаний» (1834), но он понимал ее, однако, только как исследование соотношений между скоростями различных частей машины. То обстоятельство, что Ампер ничего не говорит об ускорениях, объясняется тем, что в то время этого термина еще не существовало.

Первая книга по кинематике вышла в 1862 г. Ее автор Анри Резаль — горный инженер и доктор наук (1828—1896) — во введении писал о том, что механика естественно делится на две части: одна — рациональная и чисто геометрическая, в которой изучают движение само по себе, а другая — физическая, покоящаяся на понятиях силы и массы, и поэтому логично сначала изложить геометрические свойства движения, чтобы от них перейти к силам, т. е. к самой причине движения.

Резаль излагает также историческую сторону вопроса. Ньютон, по-видимому, видел это подразделение; Эйлер сделал дальнейший шаг в геометрической механике, изучая перемещение сферической фигуры по ее сфере, чтобы получить мгновенную ось вращения твердого тела вокруг неподвижной точки; потом Бобилье, Шаль и Гашетт (Nachette) с чисто геометрической точки зрения занялись проведением касательных и нормалей к кривым при помощи мгновенного центра вращения фигур, могущих перемещаться в своей плоскости.

До них Декарт исследовал частный случай рулетт, или мгновенный центр поворота плоской кривой, катящейся по другой кривой, увлекая вместе с собой все точки своей собственной плоскости. Пуансо и Шаль доказали геометрически существование мгновенной оси вращения — скольжения твердых тел в пространстве, тела можно привести к движению поверхности, которая катится и скользит по другой поверхности, неподвижной в пространстве, с которой она имеет общую касательную.

В своих лекциях на парижском факультете наук (1838—1840) Понселе попытался осуществить философские концепции Ампера, применяя их к геометрической теории основных механизмов передачи движения и к теории непрерывных индикаторов, или самописцев, предназначенных для экспериментального изучения законов абсолютных и относительных движений, и т. д.

В 1841 г. профессор Кембриджского университета Виллис опубликовал «Трактат о кинематике», в котором изложена геометрическая теория и даны чертежи большого количества механизмов.

В 1841 г. Понселе, расширяя круг геометрических представлений о криволинейных движениях, ввел в науку фундаментальное понятие о геометрических ускорениях. Таким образом ему удалось окончательно заложить основы науки, для которой название было придумано Ампером, рассматривавшим, однако, исключительно ее практические приложения.

Поэтому годом создания кинематики как самостоятельной науки следует считать 1841 год, когда было установлено понятие об ускорении.

Кратко рассмотрим содержание книги Резаля «Трактат чистой кинематики».

В первой главе устанавливаются понятия о скорости точки и о сложении скоростей. Изложение правил начинается с объяснения, каким образом точка может одновременно иметь два различных движения. Приведенный пример показывает, что абсолютная скорость складывается из относительной и переносной, хотя последнее название в тексте отсутствует, по-видимому, вследствие того, что объяснение переносного движения требует предварительного определения скоростей различных точек твердого тела, являющегося переносной системой отсчета.

Вторая глава посвящена ускорению, которое вводится в два приема: сначала определяется геометрическое приращение скорости — так называемое элементарное ускорение  $dv$ , а затем изменение скорости, отнесенное к единице времени, т. е.  $\frac{dv}{dt}$ , которое и получает название «ускорение». Сложение ускорений производится тем же приемом, что и сложение скоростей; рассматриваются полные изменения скоростей обоих складываемых движений, оставляя в стороне взаимное влияние обоих движений.

Кинематике неизменяемых систем посвящены третья и четвертая главы. Первая из них посвящена скоростям в плоском и про-

странственном движении твердого тела (в частности, для плоского движения изложена теория огибающих).

Теория огибающих применялась уже в XVIII в., когда нужно было определять форму зубьев в зацеплениях зубчатых колес (у часовщиков); в то время были разработаны циклоидальные и эвольвентные зацепления, употребляющиеся до сих пор.

Рассмотрим движение некоторой кривой, начерченной на плоскости движущейся фигуры. Для определения ее движения относительно заданной неподвижной плоскости нужно вычертить на этой плоскости огибающую последовательных положений движущейся кривой (эта огибающая для кривой играла роль траектории в движении точки) и, кроме того, задать в функции времени угол поворота, или угловую скорость вращающейся фигуры. Обе кривые — огибающую и огибаемую — надо выбирать так, чтобы при обращении движения они взаимно менялись ролями; необходимо было условие, чтобы общая нормаль огибаемой и огибающей проходила через мгновенный центр скоростей движущейся фигуры; расстояние от этого центра до точки касания обеих кривых, помноженное на угловую скорость фигуры, позволяло определить величину скорости скольжения огибаемой кривой по огибающей.

Посвященная ускорениям пятая глава давала понятие о центре ускорения в случае плоского движения и, кроме того, теорему об ускорениях точки в движении тела, имеющего одну неподвижную точку. Эта теорема была опубликована Ривальсом в 1851 г. в «Журнале Политехнической школы».

Шестая глава посвящена собственным работам автора «О сверхускорениях (*suraccélération*)» — об ускорениях высших порядков, а в пятой главе излагалась хорошо известная теорема, носящая имя Кориолиса и опубликованная им в работе под названием «Исследования о приложении принципа живых сил в относительных движениях системы тел» (1831). Как видно из названия, эта работа не относилась к области кинематики, но Резаль дал ее кинематическую формулировку, теперь известную.

У Кориолиса формулировка была такова: движение материальной точки относительно движущихся осей можно рассматривать как абсолютное движение относительно неподвижных осей, если только считать движущуюся точку находящейся под действием двух фиктивных сил, кроме той силы, которая в действительности приложена к точке. Первая из этих фиктивных сил равна и прямо противоположна силе, способной осуществить переносное движение, которое точка выполняла бы, если бы она была связана неизменным образом с подвижными осями.

Эти фиктивные силы в настоящее время называются Кориолисовыми силами инерции в отличие от Д'Аламберовых сил. Упомянутая выше сила называется переносной силой инерции; вторая сила, измеряющая взаимное влияние обоих складываемых движений, в настоящее время изображается так:

$$\vec{\Phi}_k = 2m\vec{v}_{\text{отн}} \times \vec{\omega}_{\text{пер}}.$$

Она равна удвоенной массе, помноженной на векторное произведение относительной скорости на угловую скорость переносного вращения, и называется поворотной (или Кориолисовой в узком смысле этого слова) силой инерции.

В настоящее время теорема Кориолиса читается так: абсолютное ускорение в сложном движении точки равняется геометрической сумме ускорений переносного, относительного и поворотного.

$$\bar{a}_{abc} = \bar{a}_{пер} + \bar{a}_{отн} + 2\bar{\omega} \times \bar{v}_{отн}. \quad (1)$$

Пусть  $m$  — масса движущейся точки, а  $F$  — действующая на нее реальная сила. Если нужно найти абсолютное движение этой точки, то основное уравнение динамики надо написать так:

$$m\bar{a}_{abc} = \bar{F}, \quad (2)$$

и никаких Кориолисовых сил не прикладывать. Но уравнение относительного движения точки нельзя выразить в виде

$$m\bar{a}_{отн} = \bar{F},$$

так как второй закон Ньютона предполагает инерциальную систему отсчета. Поэтому приведенное уравнение представим так:

$$m\bar{a}_{abc} = m\bar{a}_{отн} + m\bar{a}_{пер} + m\bar{a}_{кор} = \bar{F} \quad (3)$$

или

$$m\bar{a}_{отн} = \bar{F} - m\bar{a}_{пер} - m\bar{a}_{кор}. \quad (3')$$

Этот результат получаем по приведенной выше формулировке Кориолиса.

Рассмотрим, будут ли Кориолисовы силы реальными или фиктивными?

Если рассматривать движение в неподвижной системе отсчета, то уравнение движения надо выражать в виде (2); Кориолисовы силы не являются даже фиктивными: они просто не существуют.

Для движущейся системы отсчета уравнение движения представляют в виде (3'). Так как, согласно принципу относительности, все системы отсчета равноправны между собой, то уравнение (3') является справедливым и обе Кориолисовы силы реальны, так как они производят вполне реальные действия. Они отличаются от действительно реальных сил  $\bar{F}$  только тем, что силы  $\bar{F}$  являются реальными в обеих системах — и в неподвижной и в движущейся, а Кориолисовы силы реальны только в подвижной системе, а в неподвижной они не существуют.

Однако может быть и другая точка зрения. Согласно третьему закону Ньютона силу следует рассматривать как действие одного материального тела на другое, сопровождаемое противодействием второго тела, приложенным к первому. Но Кориолисовы силы противодействия не имеют (вернее, нельзя указать тела, к которому можно приложить противодействие). Таким образом, Кориолисовы силы инерции, согласно третьему закону Ньютона, не имеют права на название «сила».

Идея Эйлера о необходимости выделения кинематики очень важна для исследования движения упругих деформируемых тел. После того как оказались бесплодными попытки создать молекулярную механику на основании взаимодействия между молекулами, выражаемого силами, законы которых оставались неизвестными, нужно было обратиться к рассмотрению перемещений, которые совершаются в непрерывной среде, не учитывая причин, вызывающих эти перемещения. Кроме того, пришлось изменить основной элемент: первоначально рассматривалась материальная точка, совершавшая только поступательные перемещения, а теперь пришлось взять бесконечно малый параллелепипед, сплошь заполненный массой и способный не только производить поступательное перемещение, но и вращаться и даже изменять свою форму. В связи с этим изменялся и характер математики: кроме обыкновенного механического движения в математику вошло и понятие о преобразовании, вызванное новыми операциями. Понятие о материальной точке, совершающей поступательные перемещения, осталось вполне пригодным для определения места бесконечно малого элемента.

Движение любой материальной системы считается известным, если для любого момента времени можно устанавливать положение любого элемента этой системы, который в рассматриваемом случае можно считать точкой. Пусть  $x_0, y_0, z_0$  — координаты, определяющие положение некоторой точки системы в начальный момент времени  $t = 0$ ; знание этих начальных координат позволяет выделить эту точку, индивидуализировать ее среди остальных.

Движение системы является вполне определенным, если для любого момента времени  $t$  знать положение точки, координаты которой в начальный момент времени были  $x_0, y_0, z_0$ . Координаты  $x, y, z$  нового положения точки, очевидно, являются функциями времени  $t$  и начальных ее координат. Тогда

$$x = x(t, x_0, y_0, z_0), \quad y = y(t, x_0, y_0, z_0), \quad z = z(t, x_0, y_0, z_0).$$

Предполагая, что система материальных точек сохраняет свою непрерывность и не распадается с течением времени, можно положить, что приведенные выше функции являются конечными и непрерывными.

Если сообщить времени  $t$  определенное значение, то разность между конечными и начальными координатами определит перемещение соответствующей точки. Это перемещение можно представить как прямолинейный отрезок, соединяющий начальное и конечное положение рассматриваемой точки; тогда функции  $x, y, z$  можно представить в таком виде:

$$x = a_{10} + a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0;$$

$$y = a_{20} + a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0;$$

$$z = a_{30} + a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0.$$

Полученные уравнения можно рассматривать как уравнения некоторого преобразования, которому подвергаются координаты любой точки системы. Если коэффициенты  $a_{ij}$  являются постоянными, то эти преобразования носят названия аффинных.

Нетрудно видеть, что если решить приведенные выше уравнения относительно  $x_0, y_0, z_0$ , то значения  $x_0, y_0, z_0$  выразятся через  $x, y, z$  тоже при помощи линейных уравнений, которые определяют обратный переход из конечного положения в начальное; поэтому и начальные и конечные положения являются в известной степени равноправными.

Возьмем теперь в системе совокупность точек, лежащих в одной плоскости, уравнение которой имеет вид

$$Ax + By + Cz + D = 0.$$

Если вместо  $x, y, z$  подставить их значения из приведенных уравнений, то координаты  $x_0, y_0, z_0$  тоже удовлетворят уравнениям первой степени с постоянными коэффициентами; иными словами, начальные положения точек тоже будут лежать в некоторой плоскости. Это значит, что при помощи аффинных преобразований одна плоскость преобразуется тоже в плоскость.

Так как прямую линию можно определить как пересечение двух плоскостей, то в аффинных преобразованиях прямая тоже преобразуется в прямую и точка пересечения двух прямых преобразуется тоже в точку пересечения двух прямых, получившихся в результате преобразования из первых. Угол между преобразованными прямыми, однако, вообще не равен углу между первоначальными прямыми.

Две параллельные прямые можно рассматривать как пересекающиеся в бесконечно удаленной точке. Но из уравнений преобразования следует, что конечным значениям  $x_0, y_0, z_0$  всегда соответствуют тоже конечные значения  $x, y, z$ , и наоборот, для того чтобы одна или все координаты  $x, y, z$  получили бесконечные значения, необходимо, чтобы одна или несколько координат  $x_0, y_0, z_0$  тоже имели бы бесконечно большие значения. Это показывает, что прямые, бывшие параллельными до преобразования, остаются параллельными и после этого преобразования.

Рассмотрим теперь частные случаи аффинных преобразований. Предположим сначала, что коэффициенты  $a_{10}, a_{20}, a_{30}$  имеют любые значения, а из остальных  $a_{11} = a_{22} = a_{33} = 1$  и все  $a_{ij}$  при  $i \neq j$  равны нулю; в таком случае уравнения преобразования примут вид

$$x = a_{10} + x_0, y = a_{20} + y_0, z = a_{30} + z_0.$$

Это показывает, что приведенное преобразование соответствует поступательному перемещению, когда все точки получают одинаковые перемещения, проекции которых на координатные оси будут

$$a_{10} = x - x_0, a_{20} = y - y_0, a_{30} = z - z_0.$$

Таким образом, из каждого аффинного преобразования можно выделить часть, соответствующую поступательному перемещению.

После выделения этой части уравнения аффинного преобразования примут вид:

$$x = a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0;$$

$$y = a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0;$$

$$z = a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0.$$

Эти уравнения очень похожи на уравнения, дающие преобразования системы координат, когда сохраняется начало координат  $O$ :

$$x = x_0 \cos(x, x_0) + y_0 \cos(x, y_0) + z_0 \cos(x, z_0);$$

$$y = x_0 \cos(y, x_0) + y_0 \cos(y, y_0) + z_0 \cos(y, z_0);$$

$$z = x_0 \cos(z, x_0) + y_0 \cos(z, y_0) + z_0 \cos(z, z_0).$$

Такое преобразование представит вращение координатной системы вокруг начала координат, если между коэффициентами  $a_{ij}$  будут существовать отношения, характерные для направляющих косинусов. Можно показать, что во всяком аффинном перемещении содержится перемещение, соответствующее вращению вокруг оси, проходящей через начало координат  $O$ .

Вокруг начала координат опишем сферу радиусом единицей:

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

и подставим вместо  $x, y, z$  их выражения:

$$(a_{11}x_0 + a_{12}y_0 + a_{13}z_0)^2 + (a_{21}x_0 + a_{22}y_0 + a_{23}z_0)^2 + (a_{31}x_0 + a_{32}y_0 + a_{33}z_0)^2 = 1.$$

Нетрудно видеть, что после произведения преобразований полученное уравнение можно привести к виду

$$Ax_0^2 + By_0^2 + Cz_0^2 + 2Dx_0y_0 + 2Ey_0z_0 + 2Fz_0x_0 = 1.$$

Это равенство есть уравнение поверхности второго порядка, не имеющей бесконечно удаленных точек, т. е. полученная поверхность является эллипсоидом.

Но всякий эллипсоид имеет три взаимно перпендикулярных сопряженных диаметра, его главные оси. Эти главные оси получаются из трех сопряженных диаметров первоначальной сферы; таким образом, эти три взаимно перпендикулярные прямые в результате преобразования поворачиваются на некоторый угол вокруг какой-то оси, проходящей через неподвижную точку.

Если выделить и это преобразование, то остаточная часть аффинного преобразования сведется к такому преобразованию, которое переводит шар в эллипсоид, а это преобразование соответствует растягиванию или сжиманию шара по трем взаимно перпендикулярным направлениям.

Если эти направления совпадают с направлениями координатных осей, то упомянутое преобразование можно выразить при помощи уравнений

$$x = a_{11}'x_0, \quad y = a_{22}'y_0, \quad z = a_{33}'z_0.$$

Если  $x_0, y_0, z_0$  рассматривать как стороны прямоугольного параллелепипеда, то объем параллелепипеда, полученного после преобразования, будет

$$V = x_0 y_0 z_0 = a_{11}' a_{22}' a_{33}' (x_0 y_0 z_0) = a_{11}' a_{22}' a_{33}' \cdot V_0.$$

Для выполнения всего преобразования требуется определить коэффициенты расширения по трем главным осям; три неизвестных потребуются для определения направлений осей, по которым производятся линейные расширения; выполнение самого вращения тоже потребует трех неизвестных, например значений трех эйлеровых углов собственного вращения, нутации и прецессии. Эти девять неизвестных величин определяются по девяти заданным коэффициентам аффинного преобразования. Для выполнения этого преобразования было введено новое математическое понятие, получившее название тензора. Слово «тензор» происходит от латинского *tendo* — тяну, натягиваю.

Пусть в данной системе координат  $Oxyz$  задан вектор координатами  $(x, y, z)$ . В другой системе координат  $Ox'y'z'$  направляющие косинусы осей по отношению к прежним заданы следующей таблицей:

|       | $Ox$     | $Oy$     | $Oz$     |
|-------|----------|----------|----------|
| $Ox'$ | $a_{11}$ | $a_{12}$ | $a_{13}$ |
| $Oy'$ | $a_{21}$ | $a_{22}$ | $a_{23}$ |
| $Oz'$ | $a_{31}$ | $a_{32}$ | $a_{33}$ |

Новые координаты  $x', y', z'$  данного вектора выразятся формулами

$$x' = a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z;$$

$$y' = a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z;$$

$$z' = a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z.$$

Считаем, отвлекаясь от геометрического смысла данного преобразования, что имеются две векторные величины  $\bar{A}(x, y, z)$  и  $\bar{A}'(x', y', z')$ , связанные указанным преобразованием. Зависимость между этими величинами можно выразить так:

$$\bar{A}'(x', y', z') = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \bar{A}(x, y, z);$$

вектор  $\bar{A}'$  рассматривается как полученный из вектора  $\bar{A}$  при помощи умножения на оператор, который носит название *матрицы*.

Векторы можно представить тоже в виде матриц:

$$\bar{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \bar{A}'(x', y', z') = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Это значит, что можно установить определенное правило умножения матриц: координаты произведения получаются как суммы последовательных произведений координат множимой матрицы на элементы, стоящие сначала в первой строке матрицы, затем во второй и, наконец, в третьей, как можно убедиться из вышеприведенных формул преобразования:

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z \\ a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z \\ a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z \end{pmatrix}.$$

Правило умножения матриц можно распространить и на более сложные случаи.

Пусть имеется два последовательных преобразования:

$$\bar{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \cdot \bar{A}'(x', y', z');$$

$$\bar{A}'(x', y', z') = \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \bar{A}''(x'', y'', z'').$$

Преобразование, переводящее  $\bar{A}''(x'', y'', z'')$  в  $\bar{A}(x, y, z)$ , можно представить в виде произведения:

$$\bar{A}(x, y, z) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \cdot \bar{A}''(x'', y'', z'').$$

Отметим, что переместительный закон для умножения матриц неприменим: все умножения нужно производить в том же порядке, в каком стоят множители.

Положим

$$\bar{A}'' = \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}, \bar{A}' = \begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix}, \bar{A} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Тогда

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_{11}x'' + b_{12}y'' + b_{13}z'' \\ b_{21}x'' + b_{22}y'' + b_{23}z'' \\ b_{31}x'' + b_{32}y'' + b_{33}z'' \end{pmatrix};$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x' + a_{12}y' + a_{13}z' \\ a_{21}x' + a_{22}y' + a_{23}z' \\ a_{31}x' + a_{32}y' + a_{33}z' \end{pmatrix}.$$

Окончательный результат получится после подстановки значений  $x', y', z'$  из верхней формулы в нижнюю и вычисления соответствующих результатов:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x'' \\ y'' \\ z'' \end{pmatrix}.$$

Хотя при умножении матриц переместительный закон неприменим, но сочетательный справедлив. После умножения первых двух матриц можно получить матрицу, которая позволит перевести  $\bar{A}''(x'', y'', z'')$  в  $\bar{A}(x, y, z)$ .

Выражения для  $x, y, z$  имеют вид

$$x = A_{11}x'' + A_{12}y'' + A_{13}z'';$$

$$y = A_{21}x'' + A_{22}y'' + A_{23}z'';$$

$$z = A_{31}x'' + A_{32}y'' + A_{33}z''.$$

Коэффициент  $A_{11}$  получится, если элементы первой строки матрицы (a) помножить на элементы первого столбца матрицы (b) и результаты сложить:

$$A_{11} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{21} + a_{13}b_{31}.$$

Коэффициент  $A_{12}$  получится аналогичным перемножением элементов первой строки матрицы (a) на соответствующие элементы второго столбца матрицы (b):

$$A_{12} = a_{11}b_{12} + a_{12}b_{22} + a_{13}b_{32}.$$

Коэффициент  $A_{13}$  получится из элементов первой строки матрицы (a) и элементов третьего столбца матрицы (b):

$$A_{13} = a_{11}b_{13} + a_{12}b_{23} + a_{13}b_{33}.$$

Для получения коэффициентов  $A_{21}, A_{22}, A_{23}$  в выражении для  $y$  надо элементы второй строки матрицы (a) умножить соответственно на элементы первого, второго и третьего столбцов матрицы (b):

$$A_{21} = a_{21}b_{11} + a_{22}b_{21} + a_{23}b_{31},$$

$$A_{22} = a_{21}b_{12} + a_{22}b_{22} + a_{23}b_{32},$$

$$A_{23} = a_{21}b_{13} + a_{22}b_{23} + a_{23}b_{33}.$$

Аналогично делается и с коэффициентами в выражении для  $z$ :

$$A_{31} = a_{31}b_{11} + a_{32}b_{21} + a_{33}b_{31},$$

$$A_{32} = a_{31}b_{12} + a_{32}b_{22} + a_{33}b_{32},$$

$$A_{33} = a_{31}b_{13} + a_{32}b_{23} + a_{33}b_{33}.$$

Если элементы каждого столбца и строки рассматривать как скаляры, определяющие некоторый вектор, то в выражении для  $x$  коэффициенты при  $x'', y'', z''$  можно получить скалярным умножением вектора первой строки матрицы множителя на векторы первого, второго и третьего столбцов матрицы множителя.

Это правило можно применять и при умножении неквадратных матриц, но только если число строк множимого равняется числу столбцов множителя; матрица, получающаяся после произведения, имеет такую же структуру, как и матрица множимого.

Рассмотрим теперь подробнее матрицы, которые представляют вращение.

Пусть  $Oxy$  — некоторая система координат, а  $Ox'y'$  — другая система, получившаяся из первой в результате поворота ее вокруг  $O$  на угол  $\varphi$  против вращения часовой стрелки.

Формулы преобразования координат:

$$\begin{aligned}x' &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, \\y' &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi.\end{aligned}$$

Это преобразование при помощи матриц можно представить в виде

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi \\ -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Если в пространстве трех измерений рассматривать вращение вокруг оси  $Oz$ , то, поскольку  $z' = z$ , соответствующую матрицу можно изобразить так:

$$\begin{pmatrix} \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

При помощи матриц можно вывести кинематические формулы Эйлера, выражающие связь между проекциями угловых скоростей на подвижные и неподвижные оси.

Рассмотрим матрицу, определяющую общий случай вращения с угловой скоростью:

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k}.$$

Линейная скорость точки с радиусом-вектором  $\bar{r} = x\bar{i} + y\bar{j} + z\bar{k}$

$$\bar{v} = \bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \omega_x & \omega_y & \omega_z \\ x & y & z \end{vmatrix} = \bar{i} \begin{pmatrix} -\omega_z y + \omega_y z \end{pmatrix} + \bar{j} \begin{pmatrix} \omega_z x - \omega_x z \end{pmatrix} + \bar{k} \begin{pmatrix} -\omega_y x + \omega_x y \end{pmatrix}$$

есть выражение, которое получается после разложения детерминанта по элементам верхней строки. Результат можно представить в таком виде:

$$\bar{\omega} \times \bar{r} = \begin{pmatrix} 0 & -\omega_z & \omega_y \\ \omega_z & 0 & -\omega_x \\ -\omega_y & \omega_x & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Первый множитель представляет оператор, выражающий вращение с угловой скоростью  $\bar{\omega}$ . Полученная матрица имеет элементы

главной диагонали, равные нулю. Если рассматривать диагональ как некоторую ось симметрии, то соответствующие элементы имеют противоположные знаки. Такая матрица называется антисимметрической. Эта антисимметричность характерна для операторов, представляющих вращение, что следует из выражений, приведенных выше, для изображения вращений вокруг координатных осей.

Рассмотрим теперь оператор, соответствующий простейшему случаю чистой деформации без вращения — деформации сжатия или растяжения — по трем взаимно перпендикулярным направлениям:

$$x' = k_1 x; \quad y' = k_2 y; \quad z' = k_3 z.$$

Соответствующая матрица имеет вид

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Ее элементы, симметрично расположенные относительно главной диагонали, равны. Такие матрицы называются кососимметрическими. Как видно, самое общее преобразование (без поступательной части) можно разложить на два преобразования: вращение в чистую деформацию.

Первоначально определим сумму матриц.

Если имеются две матрицы с одинаковыми числами строк и столбцов, то эти матрицы можно сложить; их сумма выражается такой же матрицей, каждый элемент которой равен сумме соответствующих элементов складываемых матриц.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \\ a_{31} + b_{31} & a_{32} + b_{32} & a_{33} + b_{33} \end{pmatrix}.$$

Пусть теперь дана матрица

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}.$$

Составим выражения

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}(a_{12} + a_{21}) &= A; & \frac{1}{2}(a_{12} - a_{21}) &= A'; \\ \frac{1}{2}(a_{13} + a_{31}) &= B; & \frac{1}{2}(a_{13} - a_{31}) &= B'; \\ \frac{1}{2}(a_{23} + a_{32}) &= C; & \frac{1}{2}(a_{23} - a_{32}) &= C'. \end{aligned}$$

Тогда

$$a_{12} = A + A'; \quad a_{13} = B + B'; \quad a_{23} = C + C';$$

$$a_{21} = A - A'; \quad a_{31} = B - B'; \quad a_{32} = C - C'.$$

Поэтому

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & A + A' & B + B' \\ A - A' & a_{22} & C + C' \\ B - B' & C - C' & a_{33} \end{pmatrix},$$

что можно представить в виде суммы двух матриц:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & A & B \\ A & a_{22} & C \\ B & C & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 & A' & B' \\ -A' & 0 & C' \\ -B' & -C' & 0 \end{pmatrix},$$

из которых левая является кососимметрической, а правая — антиметрической.

Так как по закону Гука деформации прямо пропорциональны напряжениям, то при помощи матриц можно перейти и к исследованию распределения напряжений в упругих средах.

Возьмем в начале координат бесконечно малый объем упругого вещества, имеющий форму тетраэдра, три грани которого лежат на плоскостях координат; пусть нормаль к четвертой грани образует с координатными осями  $Ox$ ,  $Oy$ ,  $Oz$  (рис. 39) углы  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$ . Составим уравнения равновесия этого объема, учитывая лишь действия на последний упругих сил, ве-

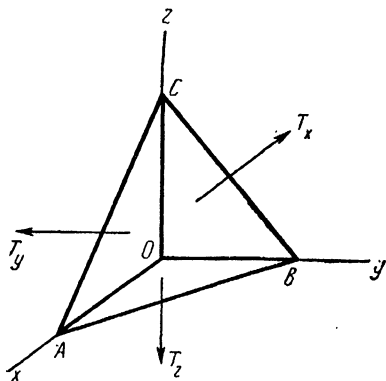


Рис. 39

личины которых пропорциональны поверхности граней.

Пусть  $dS$  — площадь грани  $ABC$ ; площади трех остальных граней, представляющих проекции  $dS$  на перпендикулярные плоскости, соответственно  $dS \cos \alpha$ ,  $dS \cos \beta$ ,  $dS \cos \gamma$ . Пусть на грани действуют упругие напряжения  $T_x$ ,  $T_y$ ,  $T_z$ ,  $T_s$ , направления которых не перпендикулярны граням.

Условие, выражающее равенство нулю суммы упругих сил, приложенных к тетраэдру, представится в виде

$$\overline{T}_s dS + \overline{T}_x dS \cos \alpha + \overline{T}_y dS \cos \beta + \overline{T}_z dS \cos \gamma = 0,$$

откуда

$$-\overline{T}_s = \overline{T}_x \cos \alpha + \overline{T}_y \cos \beta + \overline{T}_z \cos \gamma.$$

Это выражение аналогично проекции силы  $\overline{P}$  на направление единичного вектора  $\overline{n}$ :

$$\bar{P} \cdot n = P_x \cos \alpha + P_y \cos \beta + P_z \cos \gamma,$$

но только вместо скаляров  $P_x, P_y, P_z$  имеются векторы. Если сила определяется тремя скалярными проекциями, то величина  $\bar{T}_s$  в рассматриваемом случае определяется тремя векторами  $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$ ; такие величины называются тензорами. Первым примером таких величин были физические «силы», определяющие напряженное состояние упругого тела.

Попробуем найти выражение для этой величины, аналогичное тому, которое определяет вектор при помощи трех скаляров проекций.

Разложим векторы  $\bar{T}_x, \bar{T}_y, \bar{T}_z$  по координатным осям:

$$\bar{T}_x = T_{xx}\bar{i} + T_{xy}\bar{j} + T_{xz}\bar{k};$$

$$\bar{T}_y = T_{yx}\bar{i} + T_{yy}\bar{j} + T_{yz}\bar{k};$$

$$\bar{T}_z = T_{zx}\bar{i} + T_{zy}\bar{j} + T_{zz}\bar{k}.$$

Величины  $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}$  представляют нормальные напряжения, действующие на соответствующие грани; условимся считать их положительными, если они являются растягивающими, и отрицательными, если они производят сжатие. Остальные шесть величин — векторы напряжений, действующих в плоскостях граней; они аналогичны срезающим усилиям в «Соппротивлении материалов».

Можно показать, что эти шесть усилий сводятся к трем, а именно:

$$T_{xy} = T_{yx}, T_{xz} = T_{zx}, T_{yz} = T_{zy}.$$

Так как приложенные к тетраэдру силы считаем направленными во внешнюю сторону от рассматриваемого объема, то проекции  $T_{xx}, T_{yy}, T_{zz}$  отрицательны и получаем

$$\bar{T}_x = -T_{xx}\bar{i} + T_{xy}\bar{j} + T_{xz}\bar{k};$$

аналогично и для других величин. Выражение для  $\bar{T}_s$  примет вид

$$\bar{T}_s = (T_{xx} \cos \alpha \bar{i} - T_{xy} \cos \beta \bar{j} - T_{xz} \cos \gamma \bar{k}) + (-T_{yx} \cos \alpha \bar{i} + T_{yy} \cos \beta \bar{j} - T_{yz} \cos \gamma \bar{k}) + (-T_{zx} \cos \alpha \bar{i} - T_{zy} \cos \beta \bar{j} + T_{zz} \cos \gamma \bar{k}).$$

Это выражение можно представить в виде матрицы, состоящей из одного столбца:

$$\bar{T}_s = \begin{pmatrix} T_{xx} \cos \alpha - T_{xy} \cos \beta - T_{xz} \cos \gamma \\ -T_{xy} \cos \alpha + T_{yy} \cos \beta - T_{yz} \cos \gamma \\ -T_{xz} \cos \alpha - T_{yz} \cos \beta + T_{zz} \cos \gamma \end{pmatrix}$$

или в виде произведения двух матриц:

$$\bar{T}_s = \begin{pmatrix} T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ -T_{xy} & T_{yy} & -T_{yz} \\ -T_{xz} & -T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix}.$$

Выражение вектора  $\vec{T}_s$ , представляющее упругое напряжение, действующее на площадку, ориентация которой определяется направляющими косинусами  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ , рассматривается как матричное произведение некоторой матрицы на вектор  $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$  единичного вектора нормали. Оно вполне аналогично выражению, определяющему проекцию силы  $\vec{P}$  на вектор  $\vec{n}$ , т. е.  $\vec{P} \cdot \vec{n}$ , но только в рассматриваемом случае вместо вектора  $\vec{P}$  имеется кососимметричная матрица:

$$\begin{pmatrix} T_{xx} & -T_{xy} & -T_{xz} \\ -T_{xy} & T_{yy} & -T_{yz} \\ -T_{xz} & -T_{yz} & T_{zz} \end{pmatrix},$$

которая представляет тензор напряжений для рассматриваемой точки упругой среды. В данной точке можно провести любое количество площадок с различными ориентациями; умножая тензор напряжений на единичный вектор ориентации, получаем векторное выражение силы, действующей в этой точке на помещенную в ней площадку с соответствующей ориентацией.

Теперь определим величину нормального напряжения, действующего на заданную площадку; для этого нужно взять проекцию силы  $\vec{T}_s$  на единичный вектор ориентации  $\vec{n} = \cos \alpha \vec{i} + \cos \beta \vec{j} + \cos \gamma \vec{k}$ ; тогда

$$N = \vec{T}_s \cdot \vec{n} = (T_{xx} \cos \alpha - T_{xy} \cos \beta - T_{xz} \cos \gamma) \cos \alpha + (-T_{xy} \cos \alpha + T_{yy} \cos \beta - T_{yz} \cos \gamma) \cos \beta + (-T_{xz} \cos \alpha - T_{yz} \cos \beta + T_{zz} \cos \gamma) \cos \gamma = T_{xx} \cos^2 \alpha + T_{yy} \cos^2 \beta + T_{zz} \cos^2 \gamma - 2T_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2T_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2T_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Сравним теперь полученное выражение с формулой, которую получаем по теореме о шести постоянных для величины момента инерции тела относительно оси с направляющими косинусами  $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ :

$$J_{\alpha\beta\gamma} = J_{xx} \cos^2 \alpha + J_{yy} \cos^2 \beta + J_{zz} \cos^2 \gamma - 2J_{xy} \cos \alpha \cos \beta - 2J_{yz} \cos \beta \cos \gamma - 2J_{zx} \cos \gamma \cos \alpha.$$

Одинаковость полученных выражений позволяет представить выражение для  $J_{\alpha\beta\gamma}$  в том же виде, какой получен для нормального напряжения  $N$ :

$$J_{\alpha\beta\gamma} = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} \vec{n}.$$

Стоящая в этой формуле кососимметрическая матрица носит название тензора инерции.

Введение тензора инерции позволяет упростить формулы, встречающиеся в динамике твердого тела. Так, в простейшем случае вра-

ждения твердого тела вокруг неподвижной оси кинетический момент тела вокруг этой оси равняется произведению тензора инерции  $J$  на угловую скорость  $\omega$ . Кинетический момент относительно точки, лежащей на оси вращения с угловой скоростью

$$\bar{\omega} = \omega_x \bar{i} + \omega_y \bar{j} + \omega_z \bar{k},$$

можно представить в виде

$$\bar{k}_0 = \begin{pmatrix} J_{xx} & -J_{xy} & -J_{xz} \\ -J_{xy} & J_{yy} & -J_{yz} \\ -J_{xz} & -J_{yz} & J_{zz} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix}.$$

Если координатные оси являются главными, то центробежные моменты инерции равны нулю и тензор инерции имеет вид

$$\begin{pmatrix} J_{xx} & 0 & 0 \\ 0 & J_{yy} & 0 \\ 0 & 0 & J_{zz} \end{pmatrix}.$$

Приведем соответствующее выражение для тензора напряжений:

$$\begin{pmatrix} k_1 & 0 & 0 \\ 0 & k_2 & 0 \\ 0 & 0 & k_3 \end{pmatrix}.$$

Так получается чистая деформация растяжения или сжатия по трем взаимно перпендикулярным направлениям, и упругие силы  $T$  имеют направления, совпадающие с нормальными к соответствующим площадкам. Соответствующие направления в данной точке совпадают с главными осями инерции для той же точки. Поэтому две, казалось бы, совершенно различные задачи — отыскание направлений главных напряжений и главных осей инерции — сводятся к одной и той же — отысканию направлений главных осей эллипсоида, решение которой дается в любом курсе аналитической геометрии.

Эту часть механики стали называть теорией упругости. Ее создали Пуассон (1781—1840) и великий французский математик *Августин Коши* (1788—1867). После окончания Политехнической школы, где Коши получил полное инженерное образование, он стал читать лекции в Collège de France. Значение его как математика огромно: он первый приступил к упорядочению высшего анализа, который в XVIII в. разрабатывался чисто практически, не обращая внимания на теоретическое обоснование. Он является основателем теории функций мнимого переменного. В механике сплошной среды непрерывную материю он заменил непрерывными геометрическими переменными.

Основной работой Пуассона в области теории упругости является его «Мемуар об общих уравнениях равновесия и движения твердых упругих тел и жидкостей». Пуассон в науке продолжал тради-

ции Лапласа. Кроме курса теоретической механики, написанного по схеме Лапласа, ему принадлежат два мемуара по притяжению эллипсоидов. Он занимался теорией упругости; в частности, написал работу о колебании бесконечно тонких пластинок и большой мемуар «О равновесии и движении упругих твердых тел и жидкостей», изложенный с точки зрения молекулярной механики: молекулы всех тел взаимно притягиваются и вместе с тем отталкиваются вследствие действия теплоты; сила взаимодействия двух молекул есть еще неизвестная функция расстояния, отличная от нуля в «радиусе действия» молекулы и быстро убывающая при значительных величинах расстояния. Он продолжал работы Лапласа в теории капиллярных явлений, а также в математической теории тяготения. В теории поля он распространил исследования и на область электростатических и магнитных явлений.

С исторической точки зрения интересна его полемика о волновой теории света, созданной Френелем. Начало этой полемики восходит еще к Лапласу, придерживавшемуся ньютоновской теории истечения и давшему теорию, объяснявшую законы распространения света в прозрачных телах с точки зрения движения световых частиц. Пуассон продолжил эту полемику и показал, что при справедливости теории Френеля средняя точка тени от весьма малых тел должна быть так же освещена, как при отсутствии затемняющего тела. Френель поставил соответствующий опыт, который показал, что явление, предсказанное теорией Пуассона, действительно имеется. Таким образом, опровержение волновой теории, которое Пуассон считал решающим, обратилось в блистательное ее подтверждение. Учеником Пуассона был М. В. Остроградский.

## ПРИНЦИП ГАМИЛЬТОНА

Одним из замечательных математиков и талантливейшим человеком XIX в. был *Вильям Роуэн Гамильтон* (1805—1865). Он родился в Дублине. К 12 годам он владел уже двенадцатью языками, в том числе персидским и арабским. Когда ему было 10 лет, он прочитал Евклида в латинском переводе, в 13 лет он изучил ньютонову «Универсальную арифметику», в 16 лет познакомился с его «Началами», а в 17 лет приступил к изучению «Небесной механики» Лапласа. В 22 года он стал профессором астрономии Дублинского университета, занялся усовершенствованием астрономических приборов и приступил к оптическим исследованиям. В это время в Западной Европе шла борьба между ньютоновской теорией истечения света и теорией волнообразного распространения света в эфире, которую разрабатывал Френель. Как аналитик Гамильтон пользовался обеими теориями, стремясь создать общую теорию.

Основной его идеей был принцип Ферма, гласивший, что при распространении света в различных средах переход светового луча из начальной точки в конечную совершается в кратчайшее время. Покажем, как этот принцип применяется при исследовании преломления света.

Установленные голландцем Снеллием законы преломления света формулируются так.

1. Направления падающего и преломленного луча находятся в одной плоскости с нормалью к поверхности раздела обеих сред в точке падения.

2. При переходе света из пустоты в какую-либо среду отношение синусов углов, образованных падающим и преломленным лучами с нормалью, есть величина постоянная, называемая коэффициентом преломления в веществе этой среды.

3. Если свет переходит из среды с коэффициентом преломления  $n_1$  в среду с коэффициентом преломления  $n_2$ , то отношение синусов углов падения и преломления равно обратному отношению коэффициентов преломления обеих сред.

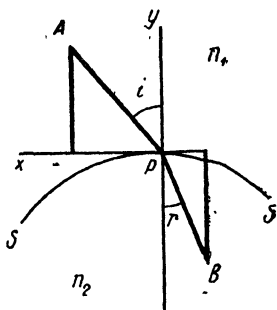


Рис. 40

Пусть  $SS$  (рис. 40) представляет сечение плоскостью чертежа поверхности, разделяющей эти среды. Уравнение этой кривой в некоторой системе координат  $\varphi(x, y) = 0$ . Пусть световой луч идет из точки  $A$  в среде с коэффициентом преломления  $n_1$  в точку  $B$  среды с коэффициентом преломления  $n_2$ . Если  $P$  — точка пересечения луча и поверхности раздела, а ось  $y$  совпадает с нормалью к этой поверхности в точке  $P$ , то отношение синусов угла падения  $i$  и угла преломления  $r$  равно

$$\frac{\sin i}{\sin r} = \frac{n_2}{n_1}. \quad (1)$$

Заметим, что если скорость распространения света в пустоте принять за единицу, то скорость света в какой-либо среде равна обратной величине ее коэффициента преломления  $n$ . Тогда время распространения света из  $A$  в  $B$  определится суммой

$$\sigma = n_1 \cdot AP + n_2 \cdot PB.$$

Покажем, что эта сумма имеет наименьшую величину, когда справедливо равенство (1).

Пусть точки  $A, B, P$  имеют координаты  $A(a_1, b_1)$ ,  $B(a_2, b_2)$  и  $P(x, y)$ . Сумма  $\sigma$  выразится равенством

$$\sigma = n_1 \sqrt{(x - a_1)^2 + (y - b_1)^2} + n_2 \sqrt{(x - a_2)^2 + (y - b_2)^2}.$$

Будем считать  $x$  независимым переменным. Незвестные координаты  $x$  и  $y$  точки  $P$  должны удовлетворять уравнениям

$$\varphi(x, y) = 0;$$

$$\frac{d\sigma}{dx} = n_1 \frac{(x - a_1) + (y - b_1) \frac{dy}{dx}}{AP} + n_2 \frac{(x - a_2) + (y - b_2) \frac{dy}{dx}}{PB} = 0.$$

Из этих уравнений определяем координаты  $x, y$  точки  $P$  и переносим в нее начало координат так, чтобы ось  $y$  совпадала с направлением нормали к  $S$  в точке  $P$ , а ось  $x$  была направлена по касательной к  $S$  в ту сторону, где координаты точки  $A$  положительны.

Тогда в точке  $P$  получим

$$x = y = 0; \quad \frac{dy}{dx} = 0,$$

а новые координаты точек  $A$  и  $B$  приобретут вид

$$x_A = a_1'; \quad x_B = -a_2'.$$

Выражение для  $\frac{ds}{dx}$  принимает вид

$$-n_1 \frac{a_1'}{AP} + n_2 \frac{a_2'}{PB} = 0,$$

откуда

$$-n_1 \sin i + n_2 \sin r = 0,$$

что получается из выражения закона (1).

Если луч света проходит через несколько сред с различными коэффициентами преломления, то, разбив его траекторию на бесконечно малые участки  $ds$  и помножив их на соответствующие коэффициенты преломления  $n$ , для суммы  $\sigma$  получим выражение

$$J = \int_A^B n ds.$$

Траектория распространения света определится из условия обращения этого интеграла в минимум.

Но рассматривая принцип наименьшего действия Мопертюи — Эйлера для движения материальной точки с массой  $m$ , получаем интеграл

$$\int m v ds,$$

который обращается в минимум. Так как масса  $m$  есть величина постоянная, то движение материальной точки определяется интегралом

$$\int v ds,$$

который только значением букв отличается от интеграла, характеризующего распространение света. Получена оптико-механическая аналогия Гамильтона: движение материальной точки и распространение света формально определяются одним и тем же законом.

Этот закон справедлив для распространения света в изотропной среде. В анизотропных средах скорости распространения света (или частицы) по различным направлениям неодинаковы. Если принять волновую теорию света, то свет получается в результате колебательных движений упругого светового эфира. Здесь основную роль должна была сыграть теория упругости, в частности понятие о главных осях тензора упругости.

Перенесенные в область световых колебаний, эти три оси получили название оптических осей упругости — направлений, по которым световые волны распространяются с одинаковой скоростью, не зависящей от направления колебаний в волновом фронте. Так как анизотропными телами являются прежде всего кристаллы, то эти три направления получили название оптических осей кристалла.

Световые колебания, по теории Френеля, совершались перпендикулярно к направлению луча (поперечные колебания); при вхождении в кристалл каждое колебание разбивалось на два, совершавшихся в плоскостях, определяемых направлениями главных осей. Таким образом, получались два пучка так называемого поляризованного света, колебания которых возникли в двух взаимно перпендикулярных плоскостях. Эти два луча распространялись с различными скоростями; один из них — так называемый обыкновенный луч — подчинялся обычным законам преломления, другой луч, получивший название необыкновенного, им не подчинялся. Явление двойного лучепреломления было замечено еще Гюйгенсом, который нашел, что оба эти луча имеют различные волновые поверхности, сечения которых плоскостью, перпендикулярной к направлению луча, для обыкновенного луча образуют окружность, а для необыкновенного — эллипс. В развитие идей Гюйгенса Френель построил сложную волновую поверхность, состоящую из двух частей — сферы и эллипсоида.

Если направление светового луча совпадало с напряжением той главной оптической оси, для которой главная оптическая упругость является наибольшей, то сечение волновой поверхности, производившееся плоскостью, перпендикулярной к этому направлению, представляло совокупность круга и эллипса, пересекавшихся в четырех точках. Если вблизи места пересечения провести общую касательную к кругу и эллипсу, то Гамильтон доказал, что касательная плоскость к волновой поверхности, проходящая через две полученные точки касания с кругом и эллипсом, касается волновой поверхности по окружности, диаметр которой и представляет расстояние между двумя упомянутыми точками. Каждой точке соприкосновения волновой поверхности с касательной плоскостью соответствует световой луч; следовательно, должен образоваться полный конус лучей, расходящихся из центра волновой поверхности и проходящих через окружность касания. Эти лучи, преломляясь при выходе из кристалла в воздух, должны быть параллельными и образовать полный цилиндр. Это явление носит название внутренней конической рефракции; предсказанное Гамильтоном теоретически, оно было подтверждено опытом, произведенным Ллойдом.

Кроме внутренней конической рефракции существует и внешняя. В каждой из указанных четырех точек пересечения круга и эллипса в плоскости, проходящей через остальные две главные оси, волновая поверхность представляет своего рода маленький конус. Поверхность этого конуса является обертывающей бесконечно большого числа касательных плоскостей, перпендикулярных к направлениям выходящих лучей; последние по выходе из кристал-

ла образуют полный конус; это явление и носит название внешней конической рефракции; оно также было подтверждено на опыте Ллойдом.

Данное исследование было проведено Гамильтоном и изложено в работе «Теория систем лучей» и в появившихся позднее трех «Дополнениях».

Оптические работы дали основной толчок к созданию принципа наименьшего действия в форме Гамильтона; к этому периоду относятся работы «Об общем методе в динамике» (1834) и «Второй очерк об общем методе в динамике» (1835).

Принцип Гамильтона формулируется так. Пусть дана система материальных точек массами  $m_i$  и стационарными связями; пусть на эти точки действуют силы, обладающие силовой функцией  $U$ . Известны положения всех точек системы в начальный момент  $t_1$  и в конечный момент  $t_2$ . Если  $T$  — кинетическая энергия этой системы, а  $L$  — функция Лагранжа

$$L = T + U,$$

то действием, по Гамильтону, называется интеграл

$$W = \int_{t_1}^{t_2} L dt.$$

Все точки системы из начального положения в конечное можно перевести различными путями. Выберем из них те, для которых переход этот совершается в одно и то же время. Тогда действительный переход системы из начального положения в конечное совершится, если действие по Гамильтону будет иметь наименьшую величину.

Принцип Гамильтона можно вывести непосредственно из принципа Д'Аламбера. Для краткости используем следующие обозначения: вместо сумм, распространенных на все значения  $a_i$  от  $i = 1$  до  $i = n$ , используем только один член суммы с сохранением индекса  $i$ ; например,

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i = a_i.$$

Если  $\bar{F}_i$  — сила, действующая на точку массой  $m_i$ , то уравнение, выражающее принцип Д'Аламбера, примет вид

$$(F_i - m_i \ddot{r}_i) \delta r_i = 0, \quad (1)$$

где величины  $F_i$  и  $\delta r_i$  соответствуют  $X_i$  и  $\delta x_i$  основной формулы.

Если имеется силовая функция  $U$ , то сумму элементарных работ действующих сил  $\sum F_i \delta r_i$  можно представить так:

$$F_i \delta r_i = \delta U.$$

Далее

$$m_i \ddot{r}_i \delta r_i = m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i) \delta r_i.$$

Воспользовавшись формулой

$$u dv = d(uv) - v du,$$

это выражение можно представить в виде

$$m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i) - m_i \dot{r}_i \frac{d}{dt} (\delta r_i) = m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i) - m_i \dot{r}_i \delta \dot{r}_i.$$

Но сумма  $m_i \dot{r}_i \delta r_i$  есть не что иное, как вариация  $\delta T$  суммы  $\frac{1}{2} m_i \dot{r}_i^2 = T$ . Таким образом, исходное уравнение (1) можно выразить так:

$$m_i \frac{d}{dt} (\dot{r}_i \delta r_i) - \delta (T + U) = 0.$$

Помножим обе части этого уравнения на  $dt$  и проинтегрируем в постоянных пределах от  $t_1$  до  $t_2$ :

$$m_i \left[ \dot{r}_i \delta r_i \right]_{t_1}^{t_2} - \int_{t_1}^{t_2} \delta (T + U) dt = 0.$$

Но так как в моменты  $t_1$  и  $t_2$  точки системы имеют вполне определенные положения, то для этих моментов вариации  $\delta r_i$  должны быть равны нулю; таким образом, окончательно получаем

$$W = \int_{t_1}^{t_2} \delta (T + U) dt = \delta \int_{t_1}^{t_2} (T + U) dt = 0.$$

Если вариация переменной величины равна нулю, то это значит, что соответствующая величина имеет или максимум, или минимум. Максимум исключается вследствие того, что кинетическая энергия  $T$  может увеличиваться как угодно далеко; таким образом, остается только одна возможность — минимум, а это и есть принцип Гамильтона.

Из принципа Гамильтона очень легко получить уравнения Лагранжа в обобщенных координатах  $q_i$ :

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i}.$$

Эти уравнения можно распространить и на случай, когда некоторые силы  $Q_i$  непотенциальны; в таком случае уравнения Лагранжа принимают вид

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i.$$

На случай нестационарных связей принцип Гамильтона был распространен в 1848 г. *М. В. Остроградским*; поэтому его называют принципом Гамильтона — Остроградского.

Дальнейшее развитие следствий из принципа Гамильтона было сделано *Карлом Густавом Якоби* (1804—1851), братом известного русского физика *Б. С. Якоби* (1801—1874); его «Лекции по динамике», прочитанные в 1842—1843 гг., были изданы только после его смерти. Основное направление этого развития заключалось

в составлении новых так называемых канонических уравнений и способов их интегрирования.

Канонические уравнения были впервые даны Гамильтоном. Функция Лагранжа  $L(q, \dot{q}, t)$  выражалась в трех переменных; Гамильтон вместо  $\dot{q}$  ввел новое переменное — обобщенный импульс  $p$ , определяемый из уравнения

$$p = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}} = \frac{\partial T}{\partial \dot{q}}.$$

Из этого уравнения можно было определить  $\dot{q}$  в функции  $p, q$  и  $t$  и подставить в функцию Гамильтона:

$$H = \sum p_i \dot{q}_i - L(q, \dot{q}, t),$$

которая таким образом выражалась в функции переменных  $p, q, t$ . Полученные уравнения — теперь уже первого порядка — представлялись в виде

$$\frac{dq}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p}, \quad \frac{dp}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial q}.$$

Их было вдвое больше, чем соответствующих уравнений Лагранжа, но интегрировались они проще: нахождение их интегралов можно было свести к интегрированию одного уравнения в частных производных первого порядка.

Последний период жизни Гамильтон посвятил разработке теории кватернионов, которую он не успел довести до конца. Его «Lectures on Quaternions» были дописаны его учениками. Его теория пользовалась успехом в некоторых математических кругах; предполагалось даже, подобно теории функций комплексного переменного, создать аналогичную теорию для кватернионов. Однако во второй половине XIX в. эти попытки успеха не имели, но так называемый четырехвектор теории относительности, где имеется три действительных вектора по трем измерениям пространства и мнимая единица для времени, удобнее было бы интерпретировать как гамильтоновский кватернион.

Отметим, что в России Гамильтон получил больше признания, чем в Западной Европе. В 1838 г. по предложению академиков Остроградского, Буняковского и Фусса он был избран членом-корреспондентом Российской Академии наук за работу «Об общем методе в динамике, при помощи которого исследование движений всех свободных систем притягивающихся или отталкивающихся точек приводится к отысканию и дифференцированию основной зависимости или характеристической функции».

## РУССКАЯ МЕХАНИКА XIX в.

Развитие русской механики значительно отличается от западно-европейской. Основными стимулами развития европейской механики были два: необходимость создания системы небесной механики,

которое занимает почти 250 лет от Коперника до Лапласа, и (примерно со второй половины XVIII в.) необходимость подготовки опытных инженеров, как военных, так и гражданских.

В России начала XIX в. первый стимул ввиду создания Лапласом небесной механики уже не существовал. Индустриализация России интенсивно началась только в 80-х годах XIX в.; поэтому второй стимул проявлялся в военном деле, которое играло первостепенную роль в первой половине XIX в.

Развитие русской механики, а также и математики, пошло по пути, намеченному французской Политехнической школой. В 1810 г. в Петербурге был основан институт путей сообщения, начальником которого был назначен француз Бетанкур. В течение 1820—1830 гг. в нем работали *Ламе* (1795—1870) и *Клапейрон* (1799—1864). Кроме того, в Петербурге, начиная с 1810 г., было основано большое число высших офицерских курсов, которые в дальнейшем были преобразованы в военные академии. Из них особо нужно отметить Михайловскую артиллерийскую академию, воспитанниками которой были *Н. В. Майевский* (1823—1892), первый ученый, поставивший задачу внешней баллистики продолговатого снаряда и решивший ее в 1872 г., *И. А. Вышнеградский* (1831—1895), работавший в области теории регулирования хода машин, *Д. К. Бобылев* (1842—1917), преподававший потом в Петербургском университете и Институте инженеров путей сообщения. Эту академию окончил также *В. Л. Кирпичев* (1845—1913), работавший затем в Харькове и Киеве; он известен своими трудами по строительной механике, а также прекрасной книгой «Беседы по механике».

В области педагогики трудно отделить работу механиков от математиков. Эта работа велась в университетах, которые были открыты в Дерпте, Вильно, Харькове и Казани. Преподаватели университетов были последователями Эйлера, значение которого для России состоит в создании учебных курсов, в первую очередь по математике, начиная с элементарной алгебры и кончая трехтомным курсом «Интегральное исчисление»; в области механики таким курсом можно назвать его «Механику точки». Наиболее важными центрами этой работы являются Петербург (академия, университет и военные учебные заведения), затем Казань и Москва.

Первым русским ученым, получившим европейскую известность, был *М. В. Остроградский* (1801—1862). Он родился в Полтавской губернии. Шестнадцати лет он поступил вольнослушателем в Харьковский университет; математикой он заинтересовался лишь на втором курсе, где на него большое влияние оказали преподаватели *Т. Ф. Осиповский* и его ученик *А. Ф. Павловский*. В 1820 г. *М. В. Остроградский* блестяще окончил курс университета, но был лишен диплома «за вольномыслие и непосещение лекций по богословию». Свое образование закончил в Париже. Там сложился окончательно его математический облик; его основными руководителями были Коши, Лаплас и Пуассон. В 1826 г. еще в Париже он представил Французской академии свою первую работу «О волнообразном дви-

жении жидкости в цилиндрическом сосуде». В 1827 г. М. В. Остроградский вернулся в Россию и стал адъюнктом Академии наук.

Первая работа М. В. Остроградского была продолжением исследований Пуассона по теории упругости — два мемуара, касающиеся малых колебаний упругой среды (неограниченной), а также упругих тел. Прочитанный им в Институте путей сообщения курс небесной механики вместе с предшествовавшими работами по теории упругости были причиной избрания М. В. Остроградского ординарным академиком. Затем он создает ряд работ в области математического анализа и вариационного исчисления.

В 40-х годах М. В. Остроградский занимался баллистической задачей (движение неоднородных сферических снарядов) и аналитической механикой («Об интегралах общих уравнений динамики»), в которой было дано обобщение принципа Гамильтона для нестационарных связей.

Его непосредственным продолжателем был *О. И. Сомов* (1815—1876), получивший высшее образование в Московском университете, где он защитил магистерскую диссертацию по высшей математике. С 1847 г. он начал преподавать различные отделы теоретической механики, придерживаясь Лагранжа, Пуассона и Остроградского. В 1862 г. после смерти Остроградского он был избран академиком.

*О. И. Сомову* (одновременно с Вейерштрассом) принадлежит исправление одной ошибки Лагранжа, который утверждал, что уравнение частот, получающихся в теории колебаний, не может иметь равных корней, так как в этом случае время, возрастающее до бесконечности, уже не будет всегда находиться под знаком синуса или косинуса.

Идеи Лагранжа, Пуассона, Остроградского развивал также *Н. Д. Брашман* (1796—1866), приехавший в Россию из Чехии и работавший сначала в Казанском университете, преподавая там математику, механику и астрономию. Он занял кафедру прикладной математики Московского университета, где и читал курс механики. В 1837 г. он выпустил книгу «Теория равновесия тел твердых и жидких или статику и гидростатику», а в 1853 г. — большой курс механики. В истории Московского университета *Н. Д. Брашмана* помнят как основателя Московского математического общества. В 1825 г. он был выбран членом-корреспондентом Петербургской Академии наук.

В середине XIX в. место М. В. Остроградского в академии занял *П. Л. Чебышев* (1821—1894) — основатель Петербургской математической школы. Он получил образование в Московском университете, в который поступил шестнадцати лет; здесь он проявил большое разнообразие своих интересов. Он защитил магистерскую диссертацию на тему «Опыт элементарного анализа теории вероятностей»; позднее он начал читать в Петербургском университете курс теории вероятностей и дал ряд исследований, из которых замечателен мемуар «О средних величинах»; в результате

его работ русская теория вероятностей заняла одно из первых мест в европейской науке.

После защиты диссертации на тему «Об интегрировании при помощи логарифмов» он был утвержден адъюнктом Петербургского университета. Эта диссертация представляет собой шаг вперед по сравнению с работами М. В. Остроградского, который дал метод нахождения рациональной части интегралов алгебраических дробей, а П. Л. Чебышев от логарифмической части интеграла перешел в дальнейшем к вопросам интегрирования иррациональных дифференциалов.

В 1849 г. П. Л. Чебышев написал книгу «Теория сравнений». Его дальнейшие исследования в области теории чисел составили предмет двух фундаментальных работ: «Об определении числа простых чисел, не превосходящих данной величины» и «Мемуар о простых числах». Он не ограничивался развитием чисто теоретических вопросов и состоял членом артиллерийского отделения военнученого комитета, а также занимался движением цилиндрико-конических снарядов.

В 1853 г., после первой поездки за границу, П. Л. Чебышев выпустил книгу «Теория механизмов, известных под названием параллелограммов». Разрабатывая конструкцию паровой машины, Уатт не мог для превращения вращательного движения в поступательное воспользоваться кривошипно-шатунным механизмом, который был уже запатентован, и ему пришлось создать специальный механизм, так называемый параллелограмм Уатта. П. Л. Чебышев для получения хотя бы приближенного прямолинейного движения создал теорию функций, наименее отклоняющихся от нуля, которая рассматривалась в этой книге. В течение 1862—1888 гг. он выпустил около 15 работ в области теории механизмов, в частности направляющих механизмов, которые производили бы прямолинейное движение.

Та же самая теория функций, наименее уклоняющихся от нуля, была применена в работах о центробежном регуляторе (получение изохронности хода механизма) и о зубчатых колесах (построение контуров зуба с помощью дуг окружностей при соблюдении возможно близкого к требуемому отношения числа оборотов колес). П. Л. Чебышев занимался и построением различных механизмов (сохранилось около сорока их моделей).

Как писал А. М. Ляпунов, П. Л. Чебышев и его последователи остаются постоянно на реальной почве, руководствуясь взглядом, что только те изыскания имеют цену, которые вызываются приложениями (научными или практическими), и только те теории действительно полезны, которые вытекают из рассмотрения частных случаев.

Среди математиков, занимавшихся механикой, первой не только в России, но и в Европе женщиной-математиком была С. В. Ковалевская (1850—1891) (ее девичья фамилия — Корвин-Круковская). Математику она любила еще в детстве; в загородном доме Корвин-Круковских ее комната, на которую не хватило обоев,



*С. В. Ковалевская (1850—1891)*

была оклеена листами из математической книги. В своих воспоминаниях С. В. Ковалевская писала о том, что листы эти, испещренные странными, непонятными формулами, скоро обратили на себя ее внимание. В детстве она проводила целые часы перед этой таинственной стеной, пытаясь разобрать хоть отдельные фразы и найти тот порядок, в котором листы должны были следовать друг за другом.

В дальнейшем с восьми-летнего возраста она стала учиться математике у домашнего учителя семьи Круковских М. И. Малевича, обладавшего способностью заставлять учеников «полюбить науку и устремиться к дальнейшему самоусовершенствованию».

Ее математические способности были настолько велики, что четырнадцати лет она смогла вполне самостоятельно разбираться в тригонометрии. После этого родители решили дать ей настоящее математическое образование, и она стала учиться высшей математике.

Когда уже пятнадцатилетней девочкой она брала первый урок дифференциального исчисления у известного преподавателя математики в Петербурге А. Н. Страннолюбского, он удивился, как скоро она схватила и усвоила понятия о пределе и о производной. И дело было в том, что в ту минуту, когда он объяснял эти понятия, ей вдруг припомнилось, что все это стояло на памятных ей листах Остроградского, и само понятие о пределе показалось давно знакомым.

Для возможности продолжать образование (в 60-х годах в России высшее образование для женщин не считалось возможным) С. В. Ковалевская вступила в фиктивный брак с В. О. Ковалевским (1843—1883), который так же как и его старший брат А. О. Ковалевский (1840—1901), был выдающимся ученым в области биологии. Будучи последователем Дарвина, А. О. Ковалевский установил происхождение позвоночных от одной из групп беспозвоночных, историей развития которых он много занимался. В. О. Ковалевский привел в восторг самого Дарвина тем, что восстановил родословную лошади на основании изучения ископаемых останков ее предков; он является основателем так называемой исторической палеонтологии.

Получив свободу, С. В. Ковалевская уехала за границу в 1869 г. Рассказывают, что знаменитый берлинский математик Вейерштрасс вернулся однажды после лекции очень недовольным, так как ни один из его студентов не мог решить предложенных им задач. Когда ему сообщили, что его хочет видеть дама, желающая учиться высшей математике (это была С. В. Ковалевская), то он, чтобы «отвязаться от нее», дал ей задачу из тех, которые не могли решить его ученики, и очень был удивлен, когда на следующий день получил вполне правильное и очень красивое решение.

В 1870—1874 г. С. В. Ковалевская большей частью была за границей — в Берлине и Париже. В 1871 г. она вместе с сестрой Анной принимала некоторое участие в революционном движении Парижской Коммуны.

В 1874 г. кончилось ученье С. В. Ковалевской у Вейерштрасса в Геттингенском университете. Давать диплом об окончании университета женщине в то время не было принято, но Вейерштрасс настоял, чтобы С. В. Ковалевской сделали исключение и выдали диплом без экзаменов на основании лишь представленных новых работ. Она представила три работы: одна из них касалась теории уравнений с частными производными, другая — гиперэллиптических интегралов, а третья носила название «Дополнения и замечания о форме колец Сатурна». Лаплас считал эти кольца жидкими, но Ковалевская доказала ошибочность этого предположения, а именно что устойчивое существование колец возможно только в случае, если они состоят из мельчайших материальных частиц; в настоящее время теория Ковалевской является общепринятой. В результате С. В. Ковалевская получила диплом доктора философии Геттингенского университета.

Когда С. В. Ковалевская вернулась в Россию, то дорога перед ней была закрыта: она получила лишь право преподавать арифметику. После возвращения в Петербург в математической жизни С. В. Ковалевской создалась пауза; она занялась общественной жизнью; фиктивный брак с В. О. Ковалевским обратился в фактический и в 1874 г. у них родилась дочь.

Хорошо знавший С. В. Ковалевскую профессор Стокгольмского университета Миттаг-Леффлер в 1884 г. после смерти ее мужа увез С. В. Ковалевскую с дочерью в Стокгольм, где она и стала читать лекции сначала в звании доцента, а потом и профессора. В 1888 г. она представила в Парижскую Академию сочинение на премию Бордена, которая предназначалась математику, сумевшему продвинуть динамику твердого тела за пределы, достигнутые Эйлером, Лагранжем и Пуансо. Это был третий и, по-видимому, последний случай интегрируемости уравнения Эйлера при любых начальных условиях. Она рассматривала тяжелое тело, эллипсоид инерции которого для неподвижной точки выражался уравнением

$$A(x^2 + y^2) + Cz^2 = 1$$

при  $A = 2C$ , а центр тяжести находился где угодно в плоскости  $Oxy$ . Так как он мог находиться и не на оси симметрии эллип-

соида вращения, то рассматриваемое тело называют иногда несимметричным гироскопом.

С. В. Ковалевская выполнила интеграцию при помощи остроумного приема — она приняла время  $t$  в качестве комплексной переменной. После получения премии Бордена она продолжала свою работу в области динамики твердого тела, за которую получила в 1889 г. премию Стокгольмской Академии наук. Более того, в том же году по ходатайству П. Л. Чебышева и других академиков она получила звание члена-корреспондента Петербургской Академии наук. Но пользоваться этим успехом ей долго не пришлось: в 1891 г. она умерла в Стокгольме от воспаления легких.

С. В. Ковалевская занималась не только математикой, но и литературной деятельностью. В 1887 г. в сотрудничестве с сестрой профессора Миттаг-Леффлера она написала сочинение под названием «Борьба за счастье». Основная идея этого произведения — «как было и как могло бы быть» математическая. В некотором интервале имеется функция непрерывная и однозначная; в конце этого интервала она раздваивается на две различные ветви, каждая из которых в свою очередь тоже однозначна и непрерывна. В этом произведении изображаются две жизни, из которых одна была, а другая могла бы быть. В жизни С. В. Ковалевской точкой раздвоения можно считать 1870 год; две ветви — это, видимо, направления: одно — направление Вейерштрасса, а другое — Чебышева, если бы С. В. Ковалевская осталась в России.

## А. М. ЛЯПУНОВ. УСТОЙЧИВОСТЬ ДВИЖЕНИЯ

Основной работой А. М. *Ляпунова* (1857—1918) была теория устойчивости движения.

Первым этапом в решении задачи на равновесие было определение положения равновесия, или закона движения тела; стали решаться задачи на равновесие тел или механической системы.

После определения положения равновесия вставал вопрос: будет ли найденное положение соответствовать устойчивому или неустойчивому равновесию? Практическое значение могли иметь только устойчивые положения; они характеризовались тем, что находящиеся в таком положении тела при небольшом отклонении автоматически возвращались в положение равновесия. Может быть впервые такая задача была поставлена в приписываемых Аристотелю «Механических проблемах».

Такой же задачей занимался и Архимед, рассматривавший положение равновесия тяжелого параболического сегмента, плававшего в жидкости различной плотности; как истинный практик Архимед рассматривал лишь устойчивые положения равновесия, проверяя, может ли рассматриваемое тело, будучи выведено из положения равновесия, самостоятельно в него вернуться.

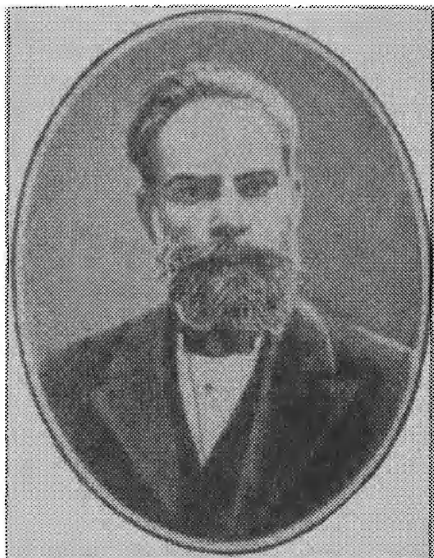
После него во избежание затруднительной работы стремились получить критерий, при помощи которого можно было бы без расчетов определить, будет ли данное положение равнове-

сия устойчивым или нет. Первый такой критерий для механической системы тел, находящихся под действием силы тяжести, дал ученик Галилея *Торричелли* (1608—1647); он указал, что устойчивое равновесие соответствует таким положениям системы, в которых высота центра тяжести имеет минимальное значение. Для часто встречающегося случая, когда тяжелое тело имеет только одну точку опоры, принцип Торричелли толковался так, что устойчивое положение равновесия получается, когда центр тяжести находится ниже точки опоры.

Обобщение второго принципа для сил, обладающих силовой функцией, было дано теоремой *Дирихле* (1805—1859).

Случай устойчивости равновесия системы тел, имеющей несколько степеней свободы, был рассмотрен Лагранжем при помощи обычного в настоящее время приема — «первого приближения», когда дело сводилось к рассмотрению системы линейных дифференциальных уравнений; если для небольших отклонений получались уравнения, соответствующие гармоническим колебаниям, то положение равновесия считалось устойчивым. Для этого требовалось, чтобы корни характеристического уравнения, при помощи которого определяются возможные периоды колебаний, были мнимыми.

Вопрос об устойчивости движения возник в XVIII в. на чисто астрономической почве. После того как было установлено, что движения небесных тел не являются вечными «по своей природе», а совершаются под действием сил всемирного тяготения, необходимо было решить, можно ли считать эти движения устойчивыми. Имелось в виду только периодическое движение планет, совершающееся по эллипсам, близким к окружностям. Если рассматривать движение только под действием силы притяжения Солнца, то возможности падения планеты на Солнце или, наоборот, удаления от него устранялись при помощи законов площадей и сохранения энергии; при наличии трансверсальной скорости планета, приближаясь к Солнцу, увеличивала свою скорость и таким образом ускользала от него; при удалении же от Солнца ее скорость тормозилась работой силы притяжения к Солнцу и планета должна была возвращаться к нему.



*А. М. Ляпунов (1857—1918)*

Однако на планеты кроме Солнца действуют также силы притяжения и других планет. Если эти возмущения будут все время действовать в одном и том же направлении, то кроме возмущений, носящих характер колебательных движений и со временем не могущих превзойти некоторой предельной величины, могут возникнуть и вековые возмущения, способные произвести с течением времени очень заметное изменение в движении рассматриваемой планеты. Исследованием этих возмущений занялся Лаплас, показавший в своей «Небесной механике», что для Солнечной системы вековые возмущения незначительны и устойчивость движений всех планет можно считать обеспеченной на очень долгое время.

Планеты далеко не всегда можно рассматривать как материальные точки; в действительности они даже являются не сферами, а всего лишь сфероидами. Таким образом, встает вопрос об устойчивости движений тел конечных размеров. Впервые этот вопрос возник при исследовании движения твердого тела в случае Пуансо — Эйлера. Было показано, что без воздействия посторонних сил тела могут вращаться только вокруг осей, совпадающих с главными центральными осями инерции, причем устойчивыми будут вращения только вокруг осей, для которых момент инерции является или наибольшим, или наименьшим.

Развитие машинной техники в XIX в. поставило еще одну задачу — регулирование хода машин, а именно получение равномерной скорости (или близкой к равномерной), когда действующие силы являются переменными. Простейшим таким прибором является обыкновенный маховик, снимающий избыток кинетической энергии при ускоренном движении и вновь отдающий его при замедлении. Затем последовали и другие типы регуляторов, изучение которых стало предметом особой дисциплины — теории регулирования хода машин. В последнее время эти вопросы стали еще более актуальными в связи с проведением автоматизации в различных отраслях промышленности: наряду с обыкновенным возникло еще автоматическое регулирование хода машин, которое развивается особенно быстро в связи с успехами строительства и оборудования скоростных самолетов и спутников.

Вопрос об автоматизации управления ставит новые задачи перед механикой. С одной стороны, заданное движение можно поддерживать путем автоматических силовых воздействий — автоматическое регулирование; с другой стороны, можно сохранить имеющееся движение при помехах и возмущениях со стороны внешних факторов, не зависящих от воли человека. Определением прочности или устойчивости движения против случайных возмущений, имеющих небольшую величину, занимались Раус (Routh), Н. Е. Жуковский, Анри Пуанкаре, но наибольшие успехи сделал А. М. Ляпунов.

А. М. Ляпунов родился 25 мая 1857 г. в Ярославле. Его отец, окончивший Казанский университет, работал в нем сначала в качестве астронома-наблюдателя, а потом заведующим обсерваторией. В 1856 г. он переселился в Ярославль, где стал директором Демидовского лицея. Кроме старшего сына Александра он имел

еще двоих: Сергея (1859—1924), известного композитора, и Бориса (1864—1942), действительного члена Академии наук по славянской филологии.

Первоначальное образование А. М. Ляпунов получил у отца, а потом у дяди по материнской линии Р. М. Сеченова, брата знаменитого физиолога. По окончании гимназии в Нижнем Новгороде в 1876 г. с золотой медалью он поступил в Петербургский университет на физико-математический факультет, сначала на естественное отделение, но уже через месяц перешел на математическое.

В это время главой Петербургской школы математиков был Я. Л. Чебышев, оказавший на А. М. Ляпунова очень большое влияние. После окончания А. М. Ляпуновым университета в 1880 г. П. Л. Чебышев предложил ему заняться исследованиями относительно фигуры небесных тел. Первое решение этой задачи было дано Клеро и затем Лапласом. Рассматривая форму планеты как поверхность уровня в силовом поле под действием сил ньютонова тяготения и центробежной силы во вращении вокруг оси планеты, Клеро и Лаплас пришли к выводу, что поверхность Земли должна иметь форму эллипсоида вращения. Однако при некоторой величине угловой скорости эллипсоидальные формы перестают служить устойчивыми формами равновесия вращающейся жидкости. П. Л. Чебышев поставил задачу так: не переходят ли они при этом в какие-нибудь новые формы равновесия, которые при малом увеличении угловой скорости мало отличались бы от эллипсоидов?

После некоторых попыток А. М. Ляпунов отложил полное решение этой задачи, ограничившись магистерской диссертацией «Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия». Защитив успешно диссертацию, А. М. Ляпунов становится заведующим кафедрой теоретической механики в Харьковском университете. В это время им была подготовлена докторская диссертация «Общая задача об устойчивости равновесия», защищенная им в 1892 г.

Теоретически вычисленные уравнения движения механической системы могут отклоняться от реально получающихся в результате действия внешних факторов — неточности в задании начальных условий, необходимых при получении интегралов для уравнений движения, и от других факторов, действующих во время движения и вызывающих случайные, как правило, весьма незначительные отклонения.

Начнем с простейшего случая. Пусть дана механическая система, положение которой определяется одной обобщенной координатой  $q$ . Если известны силы, действующие на систему, а также некоторые начальные условия, а именно значения  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  обобщенных координаты и скорости для некоторого момента  $t = t_0$ , то можно определить закон изменения координаты  $q$ , проинтегрировав соответствующее дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2q}{dt^2} = F(t, q, \dot{q}). \quad (1)$$

Пусть полученный интеграл имеет вид

$$q(t, q_0, \dot{q}_0) = f(t). \quad (2)$$

Назовем определенное этим уравнением движение невозмущенным.

Предположим теперь, что начальные значения  $q_0$  и  $\dot{q}_0$  определены неточно или изменились вследствие неуточненных случайных и временных воздействий; действительные их значения  $q_0 + \varepsilon$  и  $\dot{q}_0 + \dot{\varepsilon}$ , где  $\varepsilon$  и  $\dot{\varepsilon}$  — так называемые начальные возмущения, величина которых неизвестна. Если знать эту величину, подставив соответствующие значения в уравнение (1) и проинтегрировав, получим другой закон изменения  $q$ , отличный от определенного равенства (2). Получающуюся разность  $q - f(t) = x$  назовем возмущением. Эта разность не должна быть большой, и не только в начальный момент, но и во все время движения при  $t > t_0$ . Пусть наибольший допустимый предел ее  $L$ :

$$|q - f(t)| \leq L. \quad (3)$$

Тогда, если можно определить такие достаточно малые положительные числа  $E$  и  $\dot{E}$ , чтобы при

$$|\varepsilon| \leq E, \quad |\dot{\varepsilon}| \leq \dot{E}$$

и любом  $t \geq t_0$  имелось неравенство (3), то невозмущенное движение, определяемое (1), будет устойчивым по отношению к координате  $q$ . Однако можно потребовать и большего, а именно чтобы и обобщенная скорость  $\dot{q}$  тоже не превышала бы некоторого допустимого предела  $\dot{L}$ ; если это имеет место при тех же предельных значениях  $E$  и  $\dot{E}$ , то движение будет устойчиво по отношению к координатам  $q$  и  $\dot{q}$ .

Пусть теперь положение системы определяется  $n$  обобщенными координатами  $q_i$ . Тогда движение системы определится  $n$  уравнениями вида (1), и при некоторых начальных условиях  $\dot{q}_i^0$  и  $q_i^0$  получим всего  $n$  решений:

$$f_1(t), f_2(t), \dots, f_n(t).$$

Соответствующие уравнения определяют невозмущенные движения. Если  $n$  пар начальных значений координат и скоростей  $q_i, \dot{q}_i$  получают  $n$  пар начальных возмущений  $\varepsilon_i, \dot{\varepsilon}_i$ , предельные значения которых не должны превышать соответственно  $n$  пар значений  $E_i$  и  $\dot{E}_i$ , то невозмущенное движение будет устойчивым для  $n$  координат  $q_i$ , если за все время движения существуют неравенства

$$|q_i - f_i(t)| \leq L_1, \dots, |q_n - f_n(t)| \leq L_n;$$

соответствующие возмущения можно обозначить  $x_1, x_2, \dots, x_n$ .

Кроме того, можно потребовать устойчивости и по отношению к обобщенным скоростям.

Пусть имеются  $s$  соотношений вида  $\Phi(t, q_i^0, \dot{q}_i^0)$ , которые при начальных значениях координат и скоростей имеют вид  $\Phi_1^0(t), \dots, \Phi_s^0(t)$ . Если начальные возмущения  $\varepsilon_i$  и  $\dot{\varepsilon}_i$  для всех  $t \geq t_0$  удовлетворяют  $n$  парам неравенств

$$\epsilon_l \leq E_l, \dot{\epsilon}_l \leq \dot{E}_l$$

## и с разностями

$$|\Phi_1 - \Phi_1^0|, \dots, |\Phi_s - \Phi_s^0|$$

и не превышают соответственно заданных пределов  $L_1, \dots, L_s$ , то невозмущенное движение называется устойчивым по отношению к системе  $\Phi_1, \dots, \Phi_s$ .

Обыкновенно полагают  $\Phi_1 = q_1, \dots, \Phi_n = q_n, \Phi_{n+1} = \dot{q}_1, \dots, \Phi_{2n} = \dot{q}_n$ , так что  $s = 2n$ ; в таком случае невозмущенное движение будет устойчиво по отношению к обобщенным координатам и скоростям.

Пусть уравнения движения механической системы даны в виде

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 q_1}{dt^2} &= F_1(t; q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n), \\ &\vdots \\ \frac{d^2 q_n}{dt^2} &= F_n(t; q_1, \dots, q_n, \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) \end{aligned} \right\} \quad (4)$$

и соответствующие решения для невозмущенного движения имеют вид

$$q_1 = f_1(t), q_2 = f_2(t), \dots, q_n = f_n(t).$$

В возмущенном движении величины  $q_1, q_2, \dots, q_n$  имеют другие значения; обозначим разности между соответствующими координатами в возмущенном и невозмущенном движениях  $x_i$ :

$$x_1 = q_1 - f_1(t), x_2 = q_2 - f_2(t), \dots, x_n = q_n - f_n(t). \quad (5)$$

Эти разности представляют возмущения обобщенных координат. Продифференцировав эти равенства один раз, получим возмущения обобщенных скоростей. Продифференцировав их еще один раз, получим дифференциальные уравнения возмущенного движения вида

$$\frac{d^3 x_i}{dt^3} = \ddot{q}_i - \ddot{f}_i(t), \quad (6)$$

которые можно представить так:

$$\frac{d^2 x_i}{dt^2} = \frac{d^2 q_i}{dt^2} - \frac{d^2 (f_i)}{dt^2} = F_i(t; q_1, \dots, q_n; \dot{q}_1, \dots, \dot{q}_n) - Q_i(t).$$

Выражение  $Q_i(t)$  представляет не что иное, как правую часть соответствующего уравнения из системы (4), где все  $q_i$  и  $\dot{q}_i$  заменены выражениями  $f_i(t)$  и  $\frac{d^2 f_i(t)}{dt^2}$ .

### Возмущенные значения координат и скоростей

$$q_i = f_i(t) + x_i \text{ и } \dot{q}_i = \frac{df_i(t)}{dt} + \dot{x}_i.$$

Таким образом, правую часть равенства (6) можно представить как функцию от времени  $t$ , возмущений  $x_i$  и их производных  $\dot{x}_i$ . Обозначив ее  $X_i$ , получим систему  $n$  уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{d^2 x_1}{dt^2} &= X_1(t; x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n), \\ &\vdots \\ \frac{d^2 x_n}{dt^2} &= X_n(t; x_1, \dots, x_n; \dot{x}_1, \dots, \dot{x}_n). \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

Из системы (7) получаем дифференциальные уравнения возмущенного движения. Так как правые части этих уравнений получились из разностей  $q_i - f_i(t)$  соответствующих координат в возмущенном и невозмущенном движениях, а также из производных этих разностей, то при всех  $x_i = 0$ , т. е. когда возмущенное движение переходит в невозмущенное, уравнения (7) удовлетворяются.

Если введем обозначения

$$\dot{x}_1 = x_{n+1}, \quad \dot{x}_2 = x_{n+2}, \quad \dots, \quad \dot{x}_n = x_{2n},$$

то систему  $n$  уравнений второго порядка (7) можно заменить системой  $2n$  уравнений первого порядка:

$$\frac{dx_1}{dt} = x_{n+1}, \dots, \frac{dx_n}{dt} = x_{2n}, \quad (7')$$

$$\frac{dx_{n+1}}{dt} = X_1(t; x_1, \dots, x_{2n}) \dots \frac{dx_{2n}}{dt} = X_n(t; x_1, \dots, x_{2n}).$$

Так как совокупность равенств  $x_1 = x_2 = \dots = 0$  представляет решение системы (7'), то невозмущенное движение определяется нулевыми решениями системы дифференциальных уравнений возмущенного движения. Таким образом, любая задача на определение устойчивости рассматриваемого движения, или в частном случае равновесия, сводится к единообразной математической задаче об устойчивости нулевых решений некоторой системы дифференциальных уравнений.

Приведем теперь некоторые примеры. Будет ли устойчивым движение материальной точки, масса которой равна единице; движение определяется уравнением

$$\frac{d^2x}{dt^2} = -k^2x.$$

Полагая  $y = \frac{dx}{dt}$ , получаем уравнения

$$\frac{dx}{dt} = y, \quad \frac{dy}{dt} = -k^2 x.$$

Так как оба они имеют решение  $x = y = 0$ , то придется исследовать устойчивость нулевого решения. Но если невозмущенное решение соответствует равновесию точки в начале координат, то  $x$  и  $y$  представляют эти возмущения. В качестве начальных условий берем произвольные числа  $x_0$  и  $y_0$  и интегрируем дифференциальные уравнения возмущений:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{y_0}{k} \sin kt;$$

$$y = -kx_0 \sin kt + y_0 \cos kt.$$

Если умножить обе части первого уравнения на  $k$ , а затем возвести оба полученных уравнения в квадрат и сложить, то будем иметь

$$k^2 x^2 + y^2 = k^2 x_0^2 + y_0^2.$$

Это показывает, что  $x \leq x_0/k$ ,  $y \leq y_0$ . Так как  $x_0$  и  $y_0$  можно выбрать сколь угодно малыми, то это значит, что определяемое полученным уравнением невозмущенное движение является устойчивым.

Возьмем теперь дифференциальные уравнения возмущенного движения в таком виде:

$$\frac{dx}{dt} = ay; \quad \frac{dy}{dt} = ax,$$

где  $a > 0$ . При начальных условиях  $t = 0$ ,  $x = x_0$ ,  $y = y_0$  интеграция уравнений дает решения

$$x = \frac{1}{2} (x_0 + y_0) e^{at} + \frac{1}{2} (x_0 - y_0) e^{-at},$$

$$y = \frac{1}{2} (x_0 + y_0) e^{at} - \frac{1}{2} (x_0 - y_0) e^{-at}.$$

Так как при  $a > 0$  первые два члена с увеличением  $t$  беспредельно возрастают, то убеждаемся, что решение  $x = y = 0$  неустойчиво. Однако если ввести дополнительное условие

$$x_0 + y_0 = 0,$$

то сумма

$$x^2 + y^2 = 2x_0^2 e^{-2at}$$

окажется при некотором значении  $t$  меньшей какого-то заданного числа  $x_0^2$  и останется в дальнейшем такой же; тогда получится так называемая условная устойчивость.

Нетрудно видеть, что при  $t \rightarrow \infty$  величина  $x^2 + y^2$  имеет в пределе нуль; это так называемая асимптотическая устойчивость.

Употребленные в рассмотренных примерах выражения  $x^2 + y^2$ ,  $k^2 x^2 + y^2$  представляют так называемые квадратичные формы; под этим термином подразумевается однородный многочлен второй степени относительно переменных  $x_1, x_2, \dots, x_n$ ; представим его в общем виде:

$$a_{11}x_1^2 + a_{22}x_2^2 + \dots + a_{nn}x_n^2 + 2a_{12}x_1x_2 + \dots + 2a_{n-1,n}x_{n-1}x_n.$$

Здесь коэффициенты  $a_{ij}$  не зависят от  $x_i$ , но могут зависеть от времени  $t$ . Исследования знакопостоянства или знакопеременности таких выражений имеют большое значение в исследованиях по теории устойчивости движений. Как видно из предыдущих примеров, имеют значение не только абсолютные величины возмущений, но в основном их пределы.

При помощи рассмотрения указанных квадратичных форм можно определить условия устойчивости или неустойчивости движения даже и в том случае, когда нельзя будет в полной мере найти выражение интеграла основных дифференциальных уравнений рассматриваемого движения.

В 1902 г. А. М. Ляпунов переезжает в Петербург, где он посвящает себя исключительно научным исследованиям.

Основные работы петербургского периода деятельности А. М. Ляпунова относятся к теории фигур небесных тел и форм равновесия равномерно вращающейся жидкости, частицы которой взаимно притягиваются по закону Ньютона. В это время он получил сочинение Анри Пуанкаре о фигурах равновесия жидких масс. Прочтя работу, он убедился, что Пуанкаре остался на тех же самых позициях, которые он занимал 17 лет тому назад. Поэтому А. М. Ляпунов продолжал свои исследования, которые получили особый интерес вследствие того, что они переплелись с новой космогонической теорией, выдвинутой Джорджем Дарвином — сыном знаменитого естествоиспытателя Чарльза Дарвина, — касавшейся происхождения Луны.

Выдвинутая Дж. Дарвином теория приливной эволюции и происхождения Луны заключалась в следующем. Среди всех планетных спутников Луна выделяется своими размерами и массой; это обстоятельство делает трудно приложимой к ней теорию захвата, которой можно объяснить происхождение большого числа планетных спутников.

Рассмотрим механическую систему Земля — Луна. На эти планеты действуют силы притяжения Солнца. Если пренебречь разницей в расстоянии до Солнца от центра Земли и Луны, то можно считать обе эти планеты имеющими по направлению к Солнцу одинаковые нормальные ускорения; в таком случае относительные движения обеих планет не изменятся и можно считать центр Земли неподвижным; при этом, конечно, сохраняются как вращения обеих планет вокруг собственной оси, так и движение Луны вокруг Земли. В таком случае можно считать постоянным кинетический момент системы, складывающийся из кинетических моментов собственных вращений Земли и Луны вокруг своих осей и кинетического момента движения Луны вокруг Земли.

Так как ближайшие к Луне частицы воды на земной поверхности притягиваются сильнее, чем частицы в центре Земли, а частицы, находящиеся на противоположной стороне Земли, наоборот, слабее, то разность этих сил притяжения обуславливает две приливообразующие силы, которые на ближайшей к Луне части зем-

ной поверхности направлены к Луне, а на более отдаленной — наоборот, от Луны. Если считать диаметр Земли весьма малым по сравнению с расстоянием между Землей и Луной, то, дифференцируя формулу, выражающую закон всемирного притяжения, обратно пропорционального квадрату расстояния, нетрудно показать, что приливообразующая сила изменяется обратно пропорционально кубу расстояния. Этим объясняется то обстоятельство, что хотя силы притяжения Земли Солнцем больше, чем Луной, но приливообразующая сила Луны гораздо больше приливообразующей силы Солнца.

Эти две силы оттягивают воды океана в обе стороны от поверхности Земли, образуя приливную волну, которая при вращении Земли вокруг своей оси два раза в сутки обходит вокруг Земли. Действие этой приливной волны, идущей против направления вращения Земли, несколько тормозит вращение Земли (длительность суток незначительно возрастает). То же самое происходило и на Луне. Обе силы, действующие на Землю и на Луну, согласно третьему закону Ньютона, равны, но, поскольку масса и момент инерции Луны гораздо меньше, чем у Земли, действие приливов на Луну гораздо больше, чем на Землю. Но если кинетические моменты собственного вращения Земли и Луны уменьшаются, а общий кинетический момент системы сохраняет постоянную величину, то расстояние между Землей и Луной должно со временем увеличиваться, ибо нет причин, которые могли бы увеличить скорость Луны в ее движении вокруг Земли.

Теперь, если рассматривать движение в направлении, обратном течению времени, то можно сделать вывод, что ранее Луна была ближе к Земле и угловые скорости Земли и Луны вокруг своих осей были больше. Вычисления Дж. Дарвина показали, что когда Луна находилась в непосредственной близости к Земле, то продолжительность суток в системе Земля — Луна составляла всего пять часов. Так как исследования Пуанкаре показали, что одной из форм равновесия вращающейся жидкой массы является грушевидная, а Дарвин определил, что при скорости вращения, соответствующей продолжительности суток около пяти часов, устойчивость грушевидной формы жидкой массы нарушится, то Луна — меньшая часть груши — должна оторваться от остальной части, которая и составит Землю.

Теория приливной эволюции в настоящее время является общепризнанной; она объясняет, почему Луна обращена к Земле всегда одной стороной (угловая скорость собственного вращения Луны одинакова со скоростью ее обращения вокруг Земли).

Однако теория Дж. Дарвина о происхождении Луны не оказалась справедливой. А. М. Ляпунов показал, что Пуанкаре и Дарвин в своих исследованиях применяли только первые приближения, и отброшенные ими члены в действительности могли иметь такую величину, что делают результаты, полученные Дарвином, невозможными, а именно грушевидная форма равновесия была неустойчивой с самого начала и, следовательно, не могла образоваться.

В дальнейшем английский астроном Джинс произвел пересмотр вычислений Дарвина по приближенным формулам. Ему удалось обнаружить в вычислениях Дарвина пренебрежение членами, которые сам Дарвин считал ничтожными, но которые в действительности оказались достаточно большими. Когда было произведено второе вычисление уже по формулам второго приближения, то полученные результаты оказались в полном согласии с теорией Ляпунова.

Материал, касающийся фигур равновесия жидкой массы, опубликованный за период 1905—1918 г. и только в «Записках Русской Академии наук», составляет около 750 страниц текста. Разработка оставленного Ляпуновым материала представляет громадную задачу, которая выполняется его последователями как в нашей стране, так и за рубежом.

В настоящее время теория устойчивости Ляпунова является одним из сильнейших математических средств в исследованиях, касающихся космических полетов.

## Н. Е. ЖУКОВСКИЙ. ВОЗНИКНОВЕНИЕ ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЙ АЭРОДИНАМИКИ

Отец русской авиации *Н. Е. Жуковский* родился 17 января 1847 г. в деревне Орехово Владимирской губернии. Он был сыном инженера по дорожному строительству. Первоначальное образование он со своим старшим братом получил в семье; их учителем был замечательный педагог А. Х. Репман, естествоиспытатель по специальности, который научил Николая Егоровича понимать и любить природу. Живое чувство природы не оставляло ученого в течение всей жизни и оно ясно обозначается в его научно-исследовательской деятельности: он умел наблюдать и выделять наиболее важные черты, определяющие изучаемое явление. В 1857 г. он вместе со старшим братом поступил в Московскую гимназию. Первые два года будущий ученый не выказывал больших успехов. Но в третьем классе, где математику стал преподавать известный автор учебников А. Ф. Малинин и началось изложение геометрии, Николай Егорович показал недюжинные геометрические способности и окончил гимназию в 1864 г. с серебряной медалью.

После окончания гимназии ему пришлось поступить на физико-математический факультет Московского университета, что он сделал с очень большой неохотой, так как не чувствовал в себе никакого призвания к преподавательской деятельности.

В середине XIX в. в Московском университете, как и вообще в России, основное направление в преподавании механики было главным образом аналитическое — по Лагранжу. Определяющим было влияние М. В. Остроградского, идеи которого развивал Н. Д. Брашман — основатель Московского математического общества. Нельзя сказать, чтобы геометрические идеи Пуансо были совершенно неизвестны в Московском университете, но все-таки они стояли на втором плане.

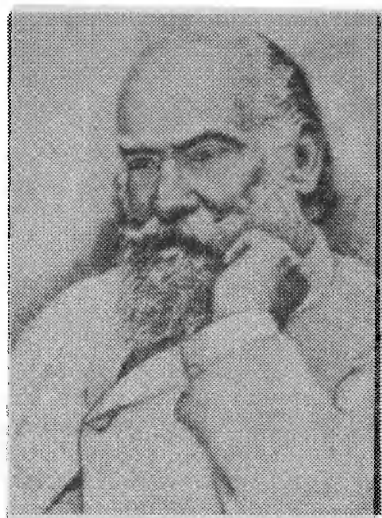
В Московском университете Н. Е. Жуковскому пришлось столкнуться с представителями обоих направлений. Теоретическую механику он слушал у Ф. А. Слудского — последователя «Аналитической механики» Лагранжа, а также у В. Я. Цингера, преподававшего на младших курсах математику. В этой борьбе двух направлений Н. Е. Жуковский определенно стал на сторону геометрического метода, не пренебрегая, однако, и аналитическим. Его идеи ясно выражены в речи, произнесенной на 25-летнем юбилее Московского математического общества.

«Отстаивая достоинства геометрического метода исследования, я далек от мысли об его исключительности. Механика должна равноправно опираться на анализ и геометрию, заимствуя от них то, что наиболее подходит к существу задачи... Анализ дает нам могущественное оружие для разрешения задач динамики. Но последняя обработка решений задачи всегда будет принадлежать геометрии»\*.

В 1870 г. Н. Е. Жуковский становится преподавателем физики в Московской второй женской гимназии и увлекается лабораторными работами. Одновременно он готовится к магистерским экзаменам. После их окончания он становится доцентом Московского высшего технического училища по кафедре аналитической механики. В 1876 г. он защищает магистерскую диссертацию на тему «Кинематика жидкого тела». Таким образом, определилось его основное направление научной деятельности.

Механика жидкого тела разделялась на две части: гидростатику и гидродинамику. Как уже известно, гидростатика — учение о равновесии жидкостей и плавающих в ней тел; ее основы были заложены еще Архимедом. Дальнейшее ее развитие относится к XVII в., когда основные законы гидростатики были установлены Стевином и Паскалем. В XVIII в. законы плавания судов были почти одновременно установлены Эйлером в его «Морской науке» и Буге, который занялся исследованием условий равновесия плавающего судна. Общее решение задачи об устойчивости равновесия плавающих тел было дано Дюпеном и А. Ю. Давидовым.

Что касается теории движения жидкостей — гидродинамики, то ее положение было значительно менее удовлетворительным. Пер-



*Н. Е. Жуковский (1847—1921)*

\* Материалы Музея Н. Е. Жуковского.

вое сочинение по гидродинамике принадлежит *Даниилу Бернулли* (1700—1782), начало деятельности которого протекало в Петербургской Академии наук: его основное произведение «Гидродинамика» вышло в 1738 г. Ему принадлежит уравнение, устанавливающее связь между скоростью жидкости, движущейся в трубе, и соответствующим давлением; эта теорема вместе с поправочными коэффициентами является основным содержанием прикладной гидродинамики — так называемой гидравлики.

Несколько позднее Эйлер и Лагранж дали дифференциальные уравнения в частных производных, определяющие движение жидкости. Но их интеграция представляла довольно трудный процесс. Кроме математических, имелись еще и принципиальные трудности. Подобно тому как в геометрической статике рассматривается идеальное, так называемое абсолютно твердое тело, в гидродинамике тоже пришлось установить понятие об идеальной жидкости. Под этим понятием подразумевалась непрерывная, несжимаемая жидкость, все части которой могли свободно перемещаться, касаясь друг друга; последнее требование равнозначно существованию лишь нормальных сил взаимодействия между частицами; таким образом, силы трения и вязкость жидкости устранялись. Но в этом случае при обтекании жидкости вокруг заключенного в ней твердого тела полная сила давления на тело оказывалась равной нулю, что, конечно, не соответствовало действительности.

Разработкой гидродинамики в течение XIX в. в Западной Европе занимались три ученых — *Августин Коши* (1789—1857), *Герман Гельмгольц* (1821—1894) и *Густав Кирхгофф* (1824—1887).

Для Коши гидродинамика представляла лишь частный случай его механики непрерывной среды. Он первый начал разрабатывать механику непрерывной среды, т. е. механику упругого твердого тела и жидкости. Он первый стал рассматривать условия равновесия и движения выделенного объема этой среды, на который действуют объемные и поверхностные силы (силы, действующие на единицу объема — массы — тела и на единицу поверхности выделенного объема); в случае упругого тела ему принадлежит установление шести составляющих напряжения — трех нормальных и трех тангенциальных, — откуда развивалась теория тензоров. В случае жидкой частицы он рассматривал не только ее поступательное и вращательное перемещение, но также и деформации — изменения объема (коэффициент кубического расширения) и формы, когда сфера переходит в эллипсоид. Он также выразил в математической форме условие непрерывности среды. Если  $u$ ,  $v$  и  $w$  представляют проекции скорости частицы на координатные оси, то в случае несжимаемой жидкости условие непрерывности выражается в форме

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0$$

или в современной форме, если ввести символ Гамильтона

$$\nabla = \bar{i} \frac{\partial}{\partial x} + \bar{j} \frac{\partial}{\partial y} + \bar{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

как скалярное произведение символа Гамильтона на вектор скорости  $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w}$ ; это так называемая дивергенция скорости, которая должна быть равна нулю.

Герман Гельмгольц родился в Потсдаме 12 августа 1821 г. После окончания военно-медицинской академии он посвятил себя изучению физиологии, не оставляя, однако, механики и физики, которыми он живо интересовался с самого детства.

В 1847 г. Г. Гельмгольц выпустил работу «О сохранении силы» (в то время термина «энергия» еще не существовало), которая наряду с исследованиями Роберта Майера и Джоуля является основополагающей в установлении закона сохранения энергии. В 1858 г. выходит его работа «Об интегралах гидродинамических уравнений, соответствующих вихревому движению», которая дает физическое истолкование элементарных вращений, лишь слегка и притом чисто аналитически намеченных в работах Коши.

Работы Коши и Гельмгольца предшествовали магистерской диссертации Н. Е. Жуковского, а научная деятельность Густава Кирхгоффа развевывалась одновременно с деятельностью Н. Е. Жуковского.

В 1842 г. Г. Кирхгофф поступил на физико-математический факультет Кенигсбергского университета, в котором процветала кенигсбергская физико-математическая школа, основанная Францем Нейманом (1798—1895) и математиком Карлом-Густавом Якоби (1804—1851), продолжателем динамики Гамильтона. Первые работы Кирхгоффа (1845—1847) касались распространения электричества по пластинкам.

В 1876 г. вышли «Лекции по математической физике» Кирхгоффа, в первом томе которых он изложил математический метод исследования плоскопараллельных движений жидкостей; видоизменение этого метода было плодом одной из блестящих гидродинамических работ Н. Е. Жуковского.

Рассмотрим его первую работу по гидродинамике — магистерскую диссертацию «Кинематика жидкого тела». Во введении к этой работе Н. Е. Жуковский писал, что в ней дан краткий, но по возможности наглядный очерк теории скоростей и ускорений непрерывно изменяемого тела. Это можно рассматривать как вступление в гидродинамику; здесь поставлены общие теоремы о движении жидкости на уровне развития, которое получили исследования изменяемых систем частного вида.

В первой главе Н. Е. Жуковский передает результаты, полученные Коши в его двух основных работах: «О движении или напряжении твердого тела» и «О распространении волн на поверхности тяжелой жидкости бесконечной глубины». Он рассматривает все три изменения, указанных Коши: деформацию, вращение и поступательное перемещение. Все бесконечно малое движение частицы складывается из поступательного движения ее центра, из движения, обращающего бесконечно малый шарик в эллипсоид деформации, бесконечно мало отличающийся от шара, и из вращения осей деформации.

Составляющие угловых скоростей мгновенного вращения частицы он получает в виде

$$p = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial \omega}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right), \quad q = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x} \right), \\ r = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y} \right).$$

В настоящее время вектор угловой скорости  $\bar{\Omega}$  этого вращения при помощи символа Гамильтона имеет вид

$$\bar{\Omega} = \frac{1}{2} [\nabla \times (u\bar{i} + v\bar{j} + w\bar{k})] = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ u & v & w \end{vmatrix}$$

и называется ротацией скоростей  $(u, v, w)$ .

Если приравнять это выражение к нулю, то получим условие, при котором выражение  $u dx + v dy + w dz$  представляет полный дифференциал. Это условие вполне аналогично условию о том, что данная система сил  $X, Y, Z$  допускает силовую функцию  $U$  или потенциальную  $\Pi = -U$ . Полученное выражение для  $\bar{\Omega}$  Гельмгольц называл вихрем.

Если исключить составляющие скорости, обусловленные вихрем  $\bar{\Omega}$ , то для остающихся скоростей  $u', v', w'$  будем иметь  $\bar{\Omega} = 0$ , а это показывает, что скорости  $u', v', w'$  можно получить как частные производные от некоторой функции  $F$  — потенциала скоростей — по соответствующим ординатам

$$u' = \frac{\partial F}{\partial x}, \quad v' = \frac{\partial F}{\partial y}, \quad w' = \frac{\partial F}{\partial z}.$$

Таким образом, остающееся движение получает название движения с потенциалом скоростей.

После исключения поступательного перемещения, определяемого движением центра частицы, получаем то, что Н. Е. Жуковский называет внутренним движением, т. е. чистую деформацию, которую он подробно рассматривает в остальной части первой главы.

Во второй главе исследуется течение жидкости, а именно рассматриваются линии и поверхности токов.

Линией тока называем кривую, касательная к которой в какой-либо точке совпадает со скоростью жидкости в этой точке в рассматриваемый момент времени  $t$  (с изменением  $t$  изменяются и линии тока). Поэтому дифференциальное уравнение линии тока получают в таком виде:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w},$$

где  $u, v, w$  — проекции скорости в данной точке на координатные оси — являются функциями  $x, y, z$  и времени  $t$ , которое мы счита-

ем постоянным. Линии тока не следует смешивать с траекториями движения частиц жидкости. Дифференциальные уравнения траекторий можно получить, если проинтегрировать уравнения

$$\frac{dx}{dt} = u(x, y, z, t), \quad \frac{dy}{dt} = v(x, y, z, t), \quad \frac{dz}{dt} = w(x, y, z, t)$$

и исключить затем время  $t$  из полученных интегралов. В одном лишь важном частном случае линии тока совпадают с действительными траекториями — при так называемом установившемся движении, когда линии тока одинаковы для всех значений  $t$ . Если  $u$ ,  $v$  и  $w$  независимы от времени  $t$ , то обе приведенные выше системы дифференциальных уравнений совпадают.

Аналогично для составляющих  $p$ ,  $q$ ,  $r$  вихря можно получить кривую, которую Гельмгольц назвал вихревой линией. Совокупность прилегающих вихревых линий образует вихревую струйку, а количество жидкости, протекающей в единицу времени через сечение такой струйки, называется напряжением вихревой струйки. Это напряжение остается постоянным по всей длине струйки, и все вихревые струйки или замкнуты, или имеют концы на поверхности жидкости.

Если окружить струйку замкнутой линией и составить сумму произведений скорости  $\vec{v}$  на соответствующий элемент длины  $d\vec{\sigma}$  линии и на косинус угла между  $\vec{v}$  и  $d\vec{\sigma}$ , то полученную сумму по всей замкнутой линии Н. Е. Жуковский называл «обтечением». В настоящее время эта величина называется циркуляцией; если рассматривать скорость как некоторую силу, то циркуляцию можно определить как полную работу этой силы при перемещении по замкнутой линии, окружающей вихревую струйку. Величина циркуляции для всякой замкнутой линии равна удвоенной сумме напряжений вихревых струек, обхватываемых этой линией.

Последние две главы посвящены сложению и разложению течений жидкости, а также ускорениям точек движущейся жидкости.

После защиты магистерской диссертации Н. Е. Жуковский получает заграничную командировку (1877), а в 1879 г. он назначается сверхштатным профессором теоретической механики в МВТУ. В это время Н. Е. Жуковский сближается с Ф. Е. Орловым, профессором прикладной механики Московского университета и основателем механического кабинета. Одновременно расширяются его знакомства с инженерными кругами, и он становится активным членом Политехнического общества. В это время Н. Е. Жуковский готовится к докторской диссертации «О прочности движения», которую он с успехом защищает в 1882 г.

После защиты докторской диссертации Н. Е. Жуковский получает степень доктора и становится приват-доцентом Московского университета, а затем он выбирается экстраординарным профессором теоретической механики Московского университета. Пребывание в университете и знакомство с рядом выдающихся профессоров — физиком А. Г. Столетовым, астрономами Ф. А. Бредихиным и В. К. Церасским, а также с математиками Б. К. Млодзеевским,

В. Я. Цингером и Н. В. Вугаевым — очень расширили круг интересов Н. Е. Жуковского.

Он выпускает ряд работ астрономического характера, из которых особенно интересна большая работа «О движении твердого тела, имеющего полости, наполненные однородной капельной жидкостью»; в то время эта работа была удостоена премии Брашмана. В конце сочинения ставится вопрос: если трение жидкости в полости тела влияет на его вращение так, что по начальному состоянию можно указать положение оси вращения, которое она примет по истечении очень продолжительного времени, то не этой ли теоремой следует объяснить то обстоятельство, что, несмотря на всякие случайные начальные скорости, планеты вращаются около своих осей инерции?

Основным сочинением по гидродинамике наряду с «Кинематикой жидкого тела» и «Движением твердого тела с полостями, наполненными капельной жидкостью» было сочинение, вышедшее в 1890 г., «Видоизменение метода Кирхгоффа для определения движения жидкости в двух измерениях при постоянной скорости, данной на неизвестной линии тока».

Рассмотрим плоскопараллельное движение несжимаемой жидкости, для которого условие непрерывности выражается в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0,$$

где  $u$  и  $v$  — некоторые функции  $x$  и  $y$ , представляющие в установившемся движении проекции скорости точки жидкости на координатные оси.

Если это уравнение представить в виде

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{\partial v}{\partial y},$$

то оно приобретет вид условия, при соблюдении которого выражение  $-vdx + udy$  является полным дифференциалом некоторой функции  $\psi$ .

Действительно, положив

$$-v = \frac{\partial \psi}{\partial x}, \quad u = \frac{\partial \psi}{\partial y},$$

получаем, что производные накрест — от  $(-v)$  по  $y$  и от  $u$  по  $x$  — равны. Таким образом, после интегрирования уравнения

$$-vdx + udy = d\psi$$

получаем интеграл

$$\psi = \text{const},$$

определяющий линию тока. Если, кроме того, имеется потенциал скоростей  $\phi$ , так что

$$u = \frac{\partial \phi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \phi}{\partial y},$$

то нетрудно видеть, что эквипотенциальные поверхности  $\varphi = \text{const}$  и линии тока  $\psi = \text{const}$  пересекаются под прямым углом.

Можно показать, что обе функции  $\varphi$  и  $\psi$  удовлетворяют уравнению Лапласа:

$$\nabla^2 \varphi = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} = 0, \quad \nabla^2 \psi = \frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} = 0.$$

Поставленная задача имеет тесную связь с теорией функций комплексного переменного.

Возьмем выражение  $P(x, y) + iQ(x, y)$ . Если надо, чтобы это выражение представляло функцию от комплексной переменной  $z = x + yi$ , то необходимо соблюдение условий

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{\partial Q}{\partial y}, \quad \frac{\partial P}{\partial y} = -\frac{\partial Q}{\partial x}.$$

Обе функции  $P$  и  $Q$ , как нетрудно убедиться, тоже удовлетворяют уравнению Лапласа.

Выше приведено

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Это показывает, что выражение

$$\varphi + i\psi = \omega$$

можно рассматривать как некоторую функцию от комплексной переменной  $z = x + yi$ :

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(x + yi)$$

или

$$\omega = f(z).$$

Теперь на координатной плоскости  $z = x + iy$  дадим  $x$  и  $y$  — ряд последовательных значений; тогда определяемая этими координатами точка  $z$  опишет на плоскости некоторую кривую

$$z = F(x, y).$$

Если возьмем другую плоскость  $\omega = \varphi + i\psi$ , координатные оси которой можно считать параллельными осям  $x, y$  первой плоскости, то, подставляя в  $\varphi$  и  $\psi$  значения  $x$  и  $y$ , определявшие на плоскости  $(x, y)$  кривую  $z = F(x, y)$ , получим на плоскости  $(\varphi, \psi)$  другую кривую, точки которой определяются выражением  $\omega = f(z)$ . Эту кривую можно рассматривать как получившуюся из первой кривой при помощи преобразования  $\omega = f(z)$ .

Можно показать, что в этом преобразовании углы между пересекающимися в одной точке прямыми или кривыми остаются такими же, как и у первоначальных, т. е. сеть кривых, пересекающихся под прямыми углами, преобразуется в сеть, соответствующие кривые которой тоже пересекаются под прямыми углами; преобразованная сеть только расширяется или сжимается и поворачивается на некоторый угол по сравнению с первоначальной. Такие преобра-

зования, обладающие свойством сохранения углов, называются конформными.

Таким образом, каждому движению жидкости с потенциалом скоростей при установившемся движении соответствует некоторая функция комплексной переменной. Обратно, если имеется некоторая функция комплексной переменной, то, разбив ее на действительную и мнимую части, при соответствующем выборе условий на границах, можно получить выражения для потенциала скоростей  $\varphi$  и функции тока  $\psi$ . Все решение задачи зависит от удачного выбора функции  $f$ .

Предположим, что на цилиндр радиусом  $R = \sqrt{k}/v_0$  набегают параллельно оси  $Ox$  из бесконечности в направлении отрицательной оси  $Ox$  плоскопараллельный поток со скоростью  $v_0$  при  $x = \infty$ . В таком случае решение задачи определится, если возьмем функцию  $f$  в таком виде:

$$f(z) = v_0 z - \frac{k}{z} = -\left(v_0 x + \frac{kx}{r^2}\right) - \left(v_0 y - \frac{ky}{r^2}\right)i,$$

где  $r^2 = x^2 + y^2$ .

В таком случае

$$\varphi = -\left(v_0 x + \frac{kx}{r^2}\right), \quad \psi = -v_0 y + \frac{ky}{r^2}.$$

Семейство линий тока получится, если положим  $\psi = C$ . Давая постоянной  $C$  различные значения, получим уравнения различных линий тока. Положив  $C = 0$ , получаем

$$y\left(v_0 - \frac{k}{r^2}\right) = 0.$$

Соответствующая линия тока состоит из двух частей:  $y = 0$  — прямая, совпадающая с осью  $x$ , и  $r^2 = \frac{k}{v_0}$  — окружность с центром в начале координат, лежащем на оси цилиндра. Эта линия тока идет из бесконечности по направлению отрицательной оси  $Ox$ ; подходя к цилиндру, она раздваивается, огибает цилиндр, а затем смыкается и уходит в бесконечность при  $x = -\infty$ . Эта линия тока определяет границы потока. Так как функция  $\psi$  удовлетворяет уравнению Лапласа, то по теореме Дирихле, зная значения  $\psi$  на границах пространства, можно определить ее значение во всех точках этого пространства.

В качестве другого примера рассмотрим функцию

$$f = \frac{ki}{\pi} \lg \frac{z}{a},$$

где

$$z = x + yi = r(\cos \Theta + i \sin \Theta) = re^{i\Theta}.$$

Тогда

$$f = \frac{ki}{\pi} \lg \frac{r}{a} - \frac{k}{\pi} \Theta,$$

$$\varphi = -\frac{k}{\pi} \Theta, \psi = \frac{k}{\pi} \lg \frac{r}{a}.$$

Как видно, линии тока представляют окружности с центром в начале координат, а эквипотенциальные линии — радиусы, исходящие из начала координат и перпендикулярные к направлениям скоростей. Получились линии тока вихря, вращающегося вокруг начала координат в отрицательном направлении, т. е. по движению часовой стрелки.

Комбинируя функции  $f$  соответствующим образом и выбирая так, чтобы какая-либо линия тока совпадала с контуром пространства, заполненного жидкостью, можно найти функции  $\varphi$  и  $\psi$ , определяющие течение жидкости в рассматриваемом пространстве.

Знакомство с университетскими астрономами оставило след в астрономических работах Н. Е. Жуковского, в частности в уже упомянутой работе «О движении твердых тел с полостями, заполненными жидкостью». Когда Комиссия по увеличению московского водопровода обратилась к нему с просьбой помочь в ее работе, то Н. Е. Жуковский дал несколько работ, касающихся исследования движения почвенных вод, в частности классическую работу «О гидравлическом ударе в водопроводных трубах», позволившую устанавливать место разрыва водопроводных труб, не дожидаясь, когда вода в месте разрыва выйдет наружу; эта работа была переведена на английский язык.

После того как математики Московского университета заинтересовались нахождением частных решений уравнений Эйлера для движения твердого тела, Н. Е. Жуковский создал ряд работ по гироскопии, в частности дал геометрическую интерпретацию случая Ковалевской.

Непрерывный ряд исследований Н. Е. Жуковского по аэродинамике и воздухоплаванию выдвинул его в число передовых ученых как в России, так и за рубежом.

Серьезно заниматься вопросами воздухоплавания Н. Е. Жуковский начал с 1890 г., когда появилась его первая статья по теории летания. В этой статье он показывает, что сила тяги самолета может получиться или в результате трения, или же вследствие срыва струй с движущегося тела, нарушающего плавное обтекание, которое требуется теорией идеальной жидкости. В этой статье он склонился в пользу силы трения, но в дальнейшем вопрос был решен в пользу теории идеальной жидкости с добавлением срыва струй и соответствующего образования вихрей.

Одна за другой следуют его работы «О парении птиц», «О наилучшем наклоне аэропланов» и «О присоединенных вихрях». В это время уже с изобретением легкого двигателя внутреннего сгорания экспериментальные и теоретические работы по воздухоплаванию начинают появляться и в России, и за границей. В 1904 г. один из учеников Н. Е. Жуковского Д. П. Рябушинский построил в Кучине Аэродинамический институт, затем строится аэродинамическая труба в Техническом училище и в Московском университете. В Техническом училище создается воздухоплавательный кру-

жок, а в 1909—1910 гг. Н. Е. Жуковский читает там впервые созданный курс «Теоретические основы воздухоплавания».

Ставится серьезно вопрос о причине возникновения подъемной силы у крыльев, имеющих изгиб кверху. Качественное объяснение причины этого возникновения было дано еще в 1894 г. английским профессором Ланчестером при помощи толкования известной теоремы Бернулли, устанавливающей связь между скоростью течения жидкой струи и возникающим в ней давлением. Он указывал, что на верхней выпуклой стороне крыла увеличивается скорость протекающей жидкости и соответственно уменьшается давление; разность давлений на нижней и верхней поверхностях крыла и является причиной направленной вверх подъемной силы. Это в основе своей правильное объяснение не позволяло, однако, получить количественного определения величины подъемной силы для заданного профиля крыла.

Способ для этого определения был открыт Н. Е. Жуковским в сентябре 1904 г. в Кучине, когда он наблюдал движение в воздухе воздушных змеев; у него появилась первая догадка, которая через два года привела к теореме Жуковского, изложенной в статье «О присоединенных вихрях». Если на профиле поперечного сечения крыла построить цилиндр с высотой, равной единице, то в потоке воздуха, набегающего со скоростью  $v$  (скорость полета самолета), действующая на этот цилиндр подъемная сила

$$c_y = \rho v \Gamma,$$

где  $\rho$  — плотность воздуха, а  $\Gamma$  — циркуляция по контуру, окружающему профиль.

В дальнейшей работе, произведенной Н. Е. Жуковским и С. А. Чаплыгиным, установлено, что для образования циркуляции необходимо, чтобы профиль имел одно острие, а все крыло длиной  $l$  — заостренную кромку. В таком случае подъемная сила крыла выражается формулой

$$c_y = \rho v \Gamma l.$$

Эта формула не учитывает явлений, происходящих по обоим концам крыла, при обтекании которых поток изменяет свою форму. Что касается формул для расчета циркуляции, то соответствующие методы были разработаны позже С. А. Чаплыгиным.

Так как эти формулы предполагали существование плоскопараллельного движения, простирающегося в бесконечность, то следующей задачей было получить формулы для расчета подъемной силы крыла конечной длины. Некоторые результаты в этой области были известны С. А. Чаплыгину в 1911 г., но полное развитие идей Жуковского и Чаплыгина в применении к крылу конечной длины было сделано немецким ученым Людвигом Прандтлем.

В это время Н. Е. Жуковский занимался другой, более сложной теорией, а именно определением силы тяги винта. Кроме набегающего потока со скоростью  $v$  самолета на лопасть винта действовал еще круговой поток, происходящий от его вращения. Рассматривая

фотографии струй, образуемых вращающимся корабельным винтом в бассейне, Н. Е. Жуковский обратил внимание на пузырьки воздуха, образовавшие винтовые линии, которые являлись следами вихревых нитей, сбегавших с лопастей винта. Это послужило основой для создания им вихревой теории воздушных винтов, которой были посвящены четыре больших мемуара, написанных в 1912—1918 гг.

В 1916 г. при аэродинамической лаборатории Московского высшего технического училища было образовано Расчетно-испытательное бюро под председательством Н. Е. Жуковского. Из этого бюро 1 декабря 1918 г. согласно постановлению Совета Народных Комиссаров был создан Центральный аэро-гидродинамический институт (ЦАГИ), объединивший группу учеников Н. Е. Жуковского по Московскому высшему техническому училищу. Это были В. П. Ветчинкин, А. Н. Туполев, Б. Н. Юрьев, Б. С. Стечкин, Г. Х. Сабинин, К. А. Ушаков, Г. Н. Мусиньянц, Н. И. Иванов и Н. Г. Ченцов.

## С. А. ЧАПЛЫГИН И ЕГО НАУЧНАЯ ДЕЯТЕЛЬНОСТЬ В ЦЕНТРАЛЬНОМ АЭРО-ГИДРОДИНАМИЧЕСКОМ ИНСТИТУТЕ (ЦАГИ)

С. А. Чаплыгин родился 6 апреля 1869 г. в городе Раненбурге (теперь г. Чаплыгин). Отец его умер 24 лет от холеры, когда мальчику было всего лишь два года. Семья переехала в Воронеж, и в 1877 г. Сергей Алексеевич поступил в гимназию. Учиться ему было легко, так как он обладал великолепной памятью (позднее он говорил, что настолько хорошо помнил все математические выводы, что даже боялся невозможности самостоятельной работы в своих исследованиях). Лучше всего ему давались языки и математика.

После окончания гимназии он поступил в университет. В университете большое влияние на его формирование оказал профессор физики А. Г. Столетов (1839—1896), который читал курс математической физики.

Властителем его дум оказался Н. Е. Жуковский, который в это время в своих «Лекциях по гидродинамике» утверждал важность этого раздела теоретической механики. Влияние Н. Е. Жуковского обнаруживается уже в первых работах С. А. Чаплыгина «О движении твердого тела в несжимаемой жидкости» (дипломная работа), «О некоторых возможных случаях движения твердого тела в жидкости» (две части, вторая из которых послужила магистерской диссертацией, защищенной в 1898 г.). Эту работу Н. Е. Жуковский охарактеризовал как единственное исследование по геометрической интерпретации движения твердого тела в жидкости; в действительности, это был перевод на геометрический язык результатов, полученных чисто аналитическими методами.

По окончании университета в 1890 г. С. А. Чаплыгин был оставлен для подготовки к профессорской деятельности со стипендией в 50 рублей, которая очень обрадовала его семью: для нее такая сумма казалась недостижимым идеалом. Через два года, когда ис-



С. А. Чаплыгин (1869—1942)

тек срок оставления при университете, Сергею Алексеевичу пришлось искать преподавательскую работу в средних учебных заведениях.

В 1893 г. он начинает преподавать физику в Московском Екатерининском женском институте, а затем и математику в Константиновском Межевом институте.

С 1896 по 1906 г. он преподает механику в Московском высшем техническом училище. В это время его теоретические работы совершенно изменяют свой характер; в основном он работает в области исследования движения твердого тела, а также изучает системы с неголономными связями, что было в то время открытием.

Исследованию неголономных систем посвящены работы «О движении тяжелого тела вращения на горизонтальной плоскости», «О некотором возможном обобщении теоремы площадей на случай катания шаров», а также «Новый взгляд на начало Гамильтона» — обобщение принципа Гамильтона на случай неголономных систем.

В этом отношении С. А. Чаплыгин опередил некоторых западноевропейских ученых, работавших в той же области. В классической механике XIX в. рассматривались преимущественно наложенные на движущиеся точки связи, которые выражались уравнениями от координат точек, а также и времени (нестационарные связи); это так называемые голономные связи; их уравнения можно было рассматривать как уравнения поверхностей в пространстве трех и более измерений.

При помощи дифференцирования этих уравнений определялись возможные перемещения точек системы, а также направления нормальных реакций связей. Однако практика второй половины XIX в. показала, что существуют такие связи, которые налагаются не на координаты (декартовы или обобщенные) точек систем, а на их производные (скорости). Если имеется стационарная связь  $f(x, y, z) = 0$ , то возможные перемещения материальной точки удовлетворяют уравнению

$$\frac{\partial f}{\partial x} \delta x + \frac{\partial f}{\partial y} \delta y + \frac{\partial f}{\partial z} \delta z = 0,$$

где  $\delta x$ ,  $\delta y$ ,  $\delta z$  — виртуальные скорости рассматриваемой точки.

Если связь голономна, то, проинтегрировав приведенное уравнение, получим уравнение первоначальной связи. Если же связи на-

лагаются только на скорости, то получающееся соотношение между виртуальными скоростями нельзя проинтегрировать; поэтому неголономные связи называются неинтегрируемыми. Число степеней свободы системы с голономными связями определяется числом ее обобщенных координат, а с неголономными — числом независимых возможных перемещений. Отсутствие обобщенных координат не позволяет воспользоваться уравнениями Лагранжа второго рода, поэтому исследование движения неголономной системы требует совершенно иного подхода.

Впервые с таким вопросом С. А. Чаплыгин столкнулся в 1895 г., изучая предложенное шведским математиком Линделефом решение задачи о качении тела вращения по шероховатой плоскости. Линделеф определял положение тела пятью координатами и применил уравнения Лагранжа. С. А. Чаплыгин нашел данное им решение неправильным, указал, в чем заключается ошибка, и предложил собственное решение.

Рассмотрим несколько более простой случай: пусть телом вращения будет шар радиусом  $R$ . Возьмем горизонтальную плоскость, по которой катится шар. Разбивая движение шара на поступательное, определяемое движением его центра, и вращение вокруг него, следуя методу Линделефа, определим движение шара пятью уравнениями: двумя, дающими движение центра  $C$  шара:

$$x_C = f_1(t), \quad y_C = f_2(t),$$

и тремя, определяющими вращение шара вокруг центра, например тремя углами Эйлера. Это было бы вполне правильно, если рассматривать свободное движение шара в пространстве, подчиненное только одной голономной связью  $z_C = R$ . В действительности же на шар наложена еще одна связь, а именно скорость точки касания шара с плоскостью должна быть равна нулю. Это условие определяет проекции угловой скорости  $\omega$  на оси  $Ox$  и  $Oy$ :

$$\omega_x = -\frac{1}{R} \frac{dy_C}{dt}, \quad \omega_y = \frac{1}{R} \frac{dx_C}{dt},$$

поэтому остается неопределенной только проекция  $\omega_z$  угловой скорости тела; получаем тело, обладающее только тремя степенями свободы, на которое наложены три связи:

$$z_C = R, \quad v_{Cx} = R\omega_y, \quad v_{Cy} = -R\omega_x,$$

одна из которых голономная и две неголономных.

Примерами неголономных систем являются велосипед, скользящие по льду коньки, серсо, направляющие ролики счетных приборов и т. д. С. А. Чаплыгин дал обобщенные уравнения Лагранжа для случая, когда на скорости некоторых точек тела налагаются ограничения. Эти уравнения вошли в курс механики под именем уравнений Чаплыгина. Работы 1897—1898 гг. по механике неголономных систем, а также работы о движении твердого тела в жидкости, пред-

ставленные в Академию наук на соискание премии графа Д. А. Толстого, удостоены присуждения большой почетной золотой медали.

Отметим, что кроме С. А. Чаплыгина неголономными системами занимался также П. В. Воронец (1871—1923), который по окончании Рязанской гимназии поступил на математическое отделение Киевского университета и получил золотую медаль за «Геометрическое исследование Эйлера случая вращения твердого тяжелого тела»; затем он защитил магистерскую диссертацию «Уравнения движения твердого тела, катящегося без скольжения по неподвижной плоскости», в котором он применил новый метод для получения уравнений движения неголономных систем. В этой области П. В. Воронец опубликовал целый цикл работ, где получил систему дифференциальных уравнений движения системы с линейными неголономными связями в наиболее общем виде и создал общий метод преобразования таких систем.

Первым чисто аэродинамическим произведением С. А. Чаплыгина была его докторская диссертация «О газовых струях», защищенная им в 1903 г. Основные ее идеи можно было отметить и раньше. Так, в 1895 г. он делал в Математическом обществе доклады «О движении газа с поверхностями разрыва», а затем «К вопросу о струях в несжимаемой жидкости». Целью этой диссертации была разработка метода, который позволил бы решать задачи о движении сжимаемой жидкости.

Данное С. А. Чаплыгиным решение задачи заключается в том, что если имеется решение соответствующей задачи для несжимаемой жидкости, то при помощи некоторых преобразований можно получить решение и в случае сжимаемой жидкости. Во время защиты диссертации эта работа встретила восторженные отзывы ряда ученых, но практического приложения тогда она иметь не могла, так как для движений с дозвуковыми скоростями влияние сжимаемости было очень невелико, а для скоростей, превышающих скорость звука, применение метода Чаплыгина встречало очень большие трудности.

Общемировое значение работа получила только в 1935 г. на конгрессе в Риме по газовой динамике. В это время и в авиации стали возможными полеты со скоростями, большими скоростей звука, и удалось получить формулы для определения влияния сжимаемости газа не только на лобовое сопротивление (это можно было сделать и при помощи метода Чаплыгина), но и рассчитать величину подъемной силы. Таким образом, работа С. А. Чаплыгина определила техническое решение задачи примерно на 30 лет.

В 1903 г. С. А. Чаплыгин получил звание профессора Московского университета и стал читать лекции по теоретической механике. Несмотря на не очень продолжительное пребывание С. А. Чаплыгина в университете, его деятельность оставила очень заметные следы.

В конце XIX и начале XX в. преподавание механики в московских высших учебных заведениях велось, по существу, под руководством Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина.

В Высшем техническом училище им. Баумана, в котором препода-

давал Н. Е. Жуковский, чтение курса механики занимало два года: на первом курсе изучалась только теоретическая механика, а на втором — аналитическая. На первом семестре читалась статика вместе с графостатикой и теорией расчета ферм, а на втором — геометрический курс кинематики (без дифференциального исчисления) и начала динамики. Аналитическая механика содержала кинематику точки в таком виде, как теперь преподается начальная часть этой науки (определение траекторий, скоростей, ускорений), затем доказательство теоремы Кориолиса при помощи девиаций, интегрирование уравнений динамики точки (в том числе и движение планет, но без колебательных движений), динамику системы и аналитическую статику, а также теорему Кастильяно.

В университете механику изучали на втором и третьем курсах: на третьем семестре читались сначала кинематика, затем статика без графостатики, а на четвертом семестре — динамика точки, в которую входили интеграция дифференциальных уравнений прямолинейного движения, математический маятник и движение планет и, наконец (что представляло особенность курса Жуковского), теория притяжения.

В Московском университете в 1911—1915 гг. основным учебником на втором курсе было литографированное издание первой части механики Н. Е. Жуковского; на третьем курсе — аналитическая статика и динамика системы С. А. Чаплыгина (5-й и 6-й семестры). В чтении курса в университете Н. Е. Жуковский придерживался именно этого порядка. Появление указанных печатных изданий объяснялось тем, что С. А. Чаплыгин читал лекции именно на третьем курсе и вел там практические занятия.

Семинарские занятия по механике вел Н. Е. Жуковский: он диктовал каждый раз около десяти задач для самостоятельного решения, которые в следующий раз и решались студентами по предварительной записи. Для получения зачета студенту, решавшему задачи на семинаре, оставалось только представить тетрадь с решенными задачами. Для тех, кто не успевал это сделать, в конце семестра устраивалось нечто вроде репетиции: ставилось шесть-семь досок, на которых студент решал задачу по своему выбору с тем лишь ограничением, чтобы выбранная им задача не решалась одновременно кем-либо из остальных пяти-шести отвечающих. Задачи Н. Е. Жуковский диктовал наизусть; когда его просили сообщить ответ, он давал его, подумав минуту, и, как правило, ответ был верным.

Задачи на семинарах Н. Е. Жуковский давал главным образом из сборника Jullien'a, который он и рекомендовал студентам. Что касается семинаров С. А. Чаплыгина, то он давал на них свои специальные задачи, в которых интеграл дифференциального уравнения движения получался в элементарных функциях только при специальном подборе начальных условий. Эти задачи он тоже давал наизусть, не ошибаясь в условиях, иногда довольно сложных.

В конце 1905 г. профессорская коллегия Московских высших женских курсов избрала С. А. Чаплыгина директором курсов.

Директором Высших женских курсов С. А. Чаплыгин оставался до 1918 г., когда курсы, преобразованные во второй государственный университет, были слиты с Московским университетом.

В конце 1909 г., когда Н. Е. Жуковский на съезде Русского общества естествоиспытателей делал доклад о возникновении подъемной силы крыла самолета, присутствовавшему на докладе С. А. Чаплыгину пришла мысль, что все трудности, связанные с определением циркуляции скорости, можно преодолеть, если учесть то обстоятельство, что крыло заканчивается острой кромкой, с которой срываются линии тока на верхней и нижней сторонах крыла. После заседания он сообщил это Н. Е. Жуковскому; выяснилось, как можно определить величину циркуляции и таким образом решить полностью задачу об определении подъемной силы самолетов.

После этого начинается ряд работ С. А. Чаплыгина в области теории воздухоплавания. В течение 1910—1911 гг. в Математическом обществе он делает доклады «Об ударе потока на дугу круга», «К теории биплана и руля высоты», «К теории полета птиц и насекомых», «К теории поддерживающей силы изогнутых пластинок» и выпускает работу «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела». В этой работе при помощи теории функций комплексного переменного были выведены формулы для определения величины и точки приложения подъемной силы самолета и приведены профили крыльев с закругленным передним концом, в частности так называемые «профили Жуковского». В 1914 г. им была написана работа «Теория решетчатого крыла», а в 1920 г. — «К общей теории крыла моноплана».

После смерти Н. Е. Жуковского в 1921 г. С. А. Чаплыгин избирается председателем коллегии Центрального аэро-гидродинамического института, и перед ним ставится задача о строительстве здания аэродинамической лаборатории в ЦАГИ, который, не имея собственной лаборатории, пользовался установками, имевшимися в лаборатории Московского высшего технического училища. В очень короткий срок был создан полный комплекс лабораторий, сразу выдвинувший ЦАГИ в первый ряд научно-исследовательских институтов мира. Одновременно был построен опытный завод, выпустивший ряд всемирно известных самолетов легкой и тяжелой авиации.

Во время работы в качестве директора ЦАГИ Сергей Алексеевич выпускает ряд работ, посвященных теории авиации: «О давлении плоскопараллельного потока на преграждающие тела» (1910) и «К общей теории крыла моноплана» (1920) и др. Последняя работа дает методы, при помощи которых устанавливаются условия устойчивости самолета, аналогичные тем, которые были получены для устойчивости плавания твердых тел в жидкости.

Точка пересечения двух линий действия давления жидкости на корпус корабля, получающихся при бесконечно малом изменении угла его наклона, называется метацентром. С. А. Чаплыгин показал геометрическим методом, что совокупность метацентров (так называемая метацентрическая кривая) для любого профиля являет-

ся параболой. Приводя систему сил воздушных давлений на самолет к центру приведения в фокусе этой параболы, получаем следующую теорему Чаплыгина: силы давления воздуха на крыло приводятся в результирующей силе  $P$ , проходящей через фокус, и постоянной паре сил, момент которой (опрокидывающий момент) равен произведению подъемной силы на расстояние от фокуса параболы до линии действия подъемной силы.

Вид и положение метacentрической кривой, или параболы устойчивости Чаплыгина, являются определяющими для характера устойчивости данного самолета. Если подобрать профиль крыла так, чтобы опрокидывающий момент равнялся нулю, то вследствие постоянства опрокидывающей пары можно сделать, чтобы подъемная сила проходила через неизменную точку крыла, так что центр давления крыла с данным профилем будет постоянным.

Если сделать ось вращения крыльев проходящей через этот центр, то управление самолетом становится очень простым, так как моменты сил воздушного потока взаимно уравниваются. Кроме того, С. А. Чаплыгин открыл еще серию профилей крыльев, известных под именем профилей Чаплыгина; от профилей Жуковского они отличаются тем, что имеют острую заднюю кромку с конечным углом; это обстоятельство не изменяет величины подъемной силы для соответствующего профиля Жуковского, но делает крыло более устойчивым.

Следующие работы С. А. Чаплыгина касались крыльев с подвижными частями (механизированных); к ним относятся: «Схематическая теория разрезного крыла» (1921), посвященная памяти Н. Е. Жуковского, «К теории открывка и закрывка» (1931) и «К теории триплана» (1937).

Работа «О влиянии плоскопараллельного потока воздуха на движущееся в нем цилиндрическое крыло», написанная в 1926 г., является родоначальницей работ ряда советских ученых в области теории неустановившегося движения для профиля, форма которого постоянна или изменяется со временем.

В 1929 г. С. А. Чаплыгин был избран в академики и вместе с Г. М. Кржижановским и В. Ф. Миткевичем стал первым членом новообразованного в Академии отделения технических наук.

С 1931 г. он по состоянию здоровья освобождается от должности начальника ЦАГИ, продолжая в нем работу в качестве начальника общетеоретического отдела, а с 1940 г. — начальника аэродинамической лаборатории ЦАГИ.

В 1941 г., когда началась Великая Отечественная война, Центральный аэро-гидродинамический институт эвакуируется в Новосибирск и С. А. Чаплыгин занимается организационной работой по переводу и приспособлению ЦАГИ к работе на оборону страны. На этой работе его застигает смерть 8 октября 1942 г.

Имена Н. Е. Жуковского и С. А. Чаплыгина неразделимы в истории русской механики и теории воздухоплавания первой четверти XX в.; более того, их деятельность настолько органически связана, что даже они сами не могли решить, кто из них первый открыл зна-

менитую теорему Жуковского — Чаплыгина о циркуляции, а курс теоретической механики в Московском университете в равной мере создан обоими учеными.

Тем не менее даже в этой частной области знания можно отметить резкие расхождения между ними. Исследования Н. Е. Жуковского почти всегда идут от частного к общему, от конкретного наблюдения или практической потребности к общей теории; его научные работы в основном представляют ряд статей, объединенных не общей мыслью, а лишь постоянством предмета исследования.

Работы С. А. Чаплыгина в области воздухоплавания представляют единую последовательность, объединяемую не предметом исследования, а развитием мысли исследователя. Если Н. Е. Жуковский считал, что целью механики является составление таких уравнений, которые можно проинтегрировать, для чего обязательно нужно уметь выбирать приближенную картину явления, наиболее характеризующую его черты, то С. А. Чаплыгин пользовался приближениями только тогда, когда мог определить погрешность, которую они представляют. Он много занимался выработкой приближенных методов интегрирования дифференциальных уравнений. Для него практические приложения получались сами собой, как результаты теории, но не наоборот. В математике он ценил теорию дифференциальных уравнений, функций комплексного переменного, дифференциальную геометрию, но скептически относился к высшей алгебре, топологии, общей теории функций и к теории множеств; следует отметить, что в последнем отношении эту же точку зрения разделял и Н. Е. Жуковский. Теория, не разработанная до конца, не привлекала его внимания; в этом отношении очень характерно, что С. А. Чаплыгин не признавал теории пограничного слоя. Его отношение к теории относительности было очень скептическим именно вследствие того, что в его время она еще не была разработана в полной мере. Что касается Н. Е. Жуковского по отношению к теории относительности Эйнштейна, то в его время она была еще «неработающей», а вещи, которые не могли быть полезными в исследовании явлений природы, у Н. Е. Жуковского успехом никогда не пользовались.

Равным образом, оба великих ученых не пользовались уже начинавшей тогда появляться векторной алгеброй: скалярное произведение Н. Е. Жуковский именовал «геометрическим», а о векторном даже и не упоминал.

## А. П. КОТЕЛЬНИКОВ. КАЗАНСКАЯ ШКОЛА МАТЕМАТИКОВ

*А. П. Котельников* является представителем Казанской школы математиков, стоящей в одном ряду с Петербургской и Московской. Основателем этой школы был *Н. И. Лобачевский* (1792—1856), работа которого определила характер всей школы, выделившейся своей оригинальностью: если Москва и Петербург в общем следовали западноевропейским классическим образцам, сохраняя евклидово

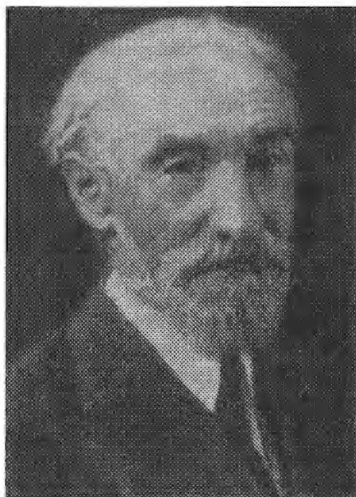
пространство, то Н. И. Лобачевский и его последователи пошли своей дорогой, сосредоточив внимание на новых и необычных образах.

Н. И. Лобачевский родился в Нижнем Новгороде в 1792 г. В 1807 г. он поступил в Казани в недавно открытый университет, где его руководителями были близкий к Гауссу математик М. Р. Бартельс и астроном И. А. Литтров. По окончании университета он получил степень кандидата. Его первой работой была «Теория эллиптического движения небесных тел», а второй — «О разрешении алгебраических уравнений  $x^m - 1 = 0$ ».

В 1816 г. он получает звание экстраординарного профессора, а после отъезда Бартельса становится ведущим математиком университета и назначается ординарным профессором кафедры чистой математики и кафедры физики.

В области теоретической механики Н. И. Лобачевскому принадлежит напечатанная в 1835 г. в «Ученых записках Московского университета» работа «Условные уравнения для движения и положения главных осей в твердой системе», но начиная с 1826 г. он целиком обращается к своей основной работе в области неевклидовой геометрии. Доклад о полученных результатах (краткое изложение основ геометрии со строгим доказательством теоремы о параллельных) был сделан им в Казанском университете в 1826 г. и не встретил одобрения. Вопрос о том, какая геометрия действительно существует в природе, по его мнению, мог быть решен только опытным путем при помощи астрономических наблюдений. Он был глубоко прав в том отношении, что полная история теоремы о параллельных немислима без привлечения астрономических исследований.

Прямоугольник был первой фигурой, рассмотренной в геометрии; его построение требовало проведения параллельных прямых, точки одной из которых находились постоянно на одинаковых расстояниях от другой. Таким образом, определение параллельных прямых как эквидистантных было исходным. Это видно из того, что в астрономии в эпоху Евклида «параллелями» назывались круги на небесной сфере, получаемые в сечении плоскостями, перпендикулярными к оси Земли. Но эти так называемые малые круги нельзя было отождествить с большими кругами, которые на сфере играли роль прямых линий в плоской геометрии. Таким образом,



А. П. Котельников (1865—1944).

Евклид понял, что эквидистантность не может служить определением параллельных прямых; поэтому в «Началах» он дал определение прямой, параллельной данным, как не пересекающей ее, сколь далеко она ни продолжалась бы. Неудобство такого определения (нельзя определять объект свойством, которого он не имеет) чувствовали приверженцы строгой логики и, безусловно, сам Евклид, так как он добавил два постулата (4-й и 5-й). Определение параллельной и эти постулаты составили «пятно» на геометрии Евклида, которое греческие, арабские и западноевропейские математики старались безуспешно снять, пытаясь «доказать» истинность постулатов Евклида.

В самом конце XVIII в. Гаусс, будучи еще студентом Геттингенского университета, вместе с Больяи-старшим обсуждал возможность существования другой геометрии, кроме Евклидовой. Работу Больяи, которая вышла в 1831 г. на шесть лет позже первого труда Лобачевского, выполнил его сын.

В 1826 г. Н. И. Лобачевский был назначен ректором Казанского университета. Главой русской математики в то время был М. В. Остроградский, который на присланную ему в 1832 г. работу Н. И. Лобачевского «О началах геометрии» прислал отрицательный отзыв.

В 1842 г. по предложению Гаусса Н. И. Лобачевский был избран членом-корреспондентом Геттингенского научного общества, а среди русских ученых профессор *П. И. Котельников* (1809—1879) произнес речь, в которой он отметил, что изумительный труд Н. И. Лобачевского «О началах геометрии» рано или поздно найдет своих ценителей.

П. И. Котельников был с 1838 г. профессором Казанского университета по кафедре прикладной механики и одновременно читал курсы теории функций комплексного переменного, основ геометрии и векторного исчисления. С 1829 по 1862 г. он был деканом физико-математического факультета и одним из немногих, оценивших геометрические открытия Н. И. Лобачевского, в то время как гениальный творец неевклидовой геометрии не получил общего признания.

А. П. Котельников родился 8 октября 1865 г. в Казани. После окончания в 1883 г. гимназии с серебряной медалью А. П. Котельников колеблется в выборе между техникой и математикой: сначала он поступает в Петербургский технологический институт, но уже в следующем году переводится на физико-математический факультет Казанского университета. В 1888 г. он защищает кандидатскую диссертацию «О давлении жидкой струи на клин», которое он определяет по методу Кирхгоффа. Эта диссертация выросла из дипломной работы, которую он выполнил под руководством профессора И. С. Громеки.

После окончания университета он два года преподает математику в женской гимназии, а затем остается при университете для подготовки к профессорскому званию. Атмосфера в университете, в котором ему пришлось работать, была пропитана идеями Лобачевского. Профессорский состав университета представляли:

Ф. М. Суворов, диссертации которого: магистерская «О характеристиках систем трех измерений» и докторская «Об изображении воображаемых точек и воображаемых прямых на плоскости» — были тесно связаны с работами по неевклидовой геометрии; А. В. Васильев — ученый, работавший во многих областях математики и пропагандист многих новых идей математики в России, редактор первого Собрания сочинений Н. И. Лобачевского и автор его биографии; Г. Н. Шебуев, читавший в Казани основные курсы по теоретической механике с 1879 по 1888 г., а затем переехавший в Москву, где он преподавал в Константиновском Межевом институте. Ему принадлежит работа «Приложения теории кватернионов к механике подобно и однородно изменяемых систем», изданная в 1893 г. в Казани; в Москве в 1898—1899 гг. он напечатал в «Памятных книжках Константиновского Межевого института» очерк векторного исчисления и теории кватернионов.

В этом же направлении начинает работать и А. П. Котельников. В 1893 г. он был утвержден приват-доцентом Казанского университета, где читает курс графической статики и ведет практические упражнения по теоретической механике. С этого же года он начинает работу над своей магистерской диссертацией «Винтовое исчисление и некоторые его применения к геометрии и механике», которую он защитил в 1896 г.

Пуансо показал, что любую систему сил в пространстве можно заменить одной силой  $R$  — главным вектором, приложенным к некоторой точке, и парой, момент которой равняется сумме моментов всех сил системы относительно этой точки. Равным образом, в кинематике Шаль показал, что любое перемещение твердого тела в пространстве можно получить в результате сложения поступательного движения, определяемого скоростью  $v$  некоторой точки тела и угловой скоростью  $\Omega$  вращения вокруг оси, проходящей через эту точку. Наиболее удобен выбор такой точки тогда, когда векторы силы и момента пары в статике или скоростей  $v$  и  $\Omega$  бесконечно малого перемещения твердого тела в кинематике направлены по одной прямой; таким образом, получается силовой винт, или динама, в статике и кинематический винт в теории движения твердого тела. Прямая линия, представляющая геометрическое место точек, обладающих таким свойством, носит название центральной оси динамы, или кинематического винта.

Пусть точка  $O$  представляет начало координат. Скорость этой точки  $\bar{v}_0 = v_x \bar{i} + v_y \bar{j} + v_z \bar{k}$ , а угловая скорость вращения  $\bar{\Omega} = p \bar{i} + q \bar{j} + r \bar{k}$ .

Пусть координаты точки центральной оси  $x, y, z$ . Скорость этой точки

$$\bar{v} = \bar{v}_0 + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ p & q & r \\ x & y & z \end{vmatrix} = k \bar{\Omega},$$

где  $k$  — некоторый коэффициент.

Уравнения центральной оси имеют вид

$$\left. \begin{aligned} v_x + qz - ry &= pk, \\ v_y + rx - pz &= qk, \\ v_z + py - qx &= rk; \end{aligned} \right\} \quad (1)$$

$$k = \frac{pv_x + qv_y + rv_z}{p^2 + q^2 + r^2}. \quad (2)$$

Коэффициент  $k$  — так называемый параметр винта — представляет отношение скоростей  $v/\Omega$  для кинематического винта или отношение наименьшего момента к главному вектору для силового винта (динама). Уравнения (1) представляют собой уравнения центральной оси, а уравнение (2) определяет величину параметра. Пять координат (четыре для прямой, пятая для параметра) определяют геометрический винт как для силового, так и для кинематического винта. Для полного представления остается только добавить вектор угловой скорости  $\Omega$  в случае кинематического винта или главный вектор  $R$  для силового винта (динамы).

Пять координат, определяемых уравнениями (1) и (2), вполне определяют геометрический винт. Однако удобнее определять его шестью однородными координатами, которые представляют векторы скоростей  $v$  и  $\Omega$  в кинематике или главный вектор и главный момент в статике. Абсолютные величины  $v$  и  $\Omega$  могут быть какими угодно; существенным является лишь их отношение, т. е. параметр  $k$ .

Английский математик Вильям Клиффорд ввел понятие о новом виде комплексных чисел. Кроме обычных комплексных чисел

$$a + bi,$$

где  $i^2 = -1$ , называемых гиперболическими, он ввел еще два новых вида:

$$a + b\omega,$$

где  $\omega^2 = +1$  — так называемые эллиптические числа, и

$$a + b\omega,$$

где  $\omega^2 = 0$  — параболические числа.

А. П. Котельников совокупность двух векторов  $v(v_x, v_y, v_z)$  и  $\Omega(p, q, r)$  назвал бивектором и, следуя Клиффорду, определял его в виде

$$\bar{v} + \bar{\Omega}\omega,$$

где  $\omega^2 = 0$ . При помощи этого обозначения он установил правила действия над винтами, продолжив работу ирландского математика Роберта Болла (1840—1913) в труде «Теория винтов».

Пусть даны два винта, выраженные в однородных, или плюккеровских, координатах:

$$\alpha(v_x, v_y, v_z, p, q, r) \text{ и } \beta(v'_x, v'_y, v'_z, p', q', r').$$

Суммой винтов  $\alpha + \beta$  называется винт  $\gamma$ , однородные координаты которого равны суммам соответствующих координат складываемых винтов:

$$\gamma(v_x + v_x', v_y + v_y', v_z + v_z', p + p', q + q', r + r').$$

Центральная ось и параметр получающегося винта находятся по уравнениям (1) и (2), в которых вместо  $v_x, v_y, v_z, p, q, r$  стоят суммы соответствующих координат. Практическое решение этой задачи было дано Боллом при помощи линейчатой поверхности, образующие которой параллельны одной плоскости, так называемого цилиндроида Болла.

Рассмотрим общий случай умножения двух бивекторов. Пусть даны два бивектора

$$\alpha = p\bar{i} + q\bar{j} + r\bar{k} + \omega(a\bar{i} + b\bar{j} + c\bar{k}),$$

$$\beta = p_1\bar{i} + q_1\bar{j} + r_1\bar{k} + \omega(a_1\bar{i} + b_1\bar{j} + c_1\bar{k}),$$

где  $\omega$  — комплексная единица, удовлетворяющая условию  $\omega^2 = 0$ , а  $\bar{i}, \bar{j}, \bar{k}$  — единичные векторы координатных осей, перемножающиеся по правилам, установленным Гамильтоном.

Это произведение можно представить и так:

$$\alpha\beta = A + \omega B,$$

где  $A$  и  $B$  — кватернионы:

$$A = -(pp_1 + qq_1 + rr_1) + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ p & q & r \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix}$$

$$B = -[ap_1 + bq_1 + cr_1 + pa_1 + qb_1 + rc_1] + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ a & b & c \\ p_1 & q_1 & r_1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} \bar{i} & \bar{j} & \bar{k} \\ p & q & r \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{vmatrix}$$

Выражение  $A + B\omega$  Клиффорд назвал бикватернионом; таким образом, произведение двух бивекторов дает бикватернион, аналогично тому, что произведение двух векторов дает кватернион, разделяющийся на две части — скалярное и векторное произведения векторов.

Рассмотренные выше бикватернионы могут представить движение в евклидовом пространстве. Если положить  $\omega^2 = +1$  или  $\omega^2 = -1$ , то можно показать, что соответствующие бикватернионы представляют движение в эллиптическом пространстве (сферическая геометрия) при  $\omega^2 = +1$  и в гиперболическом пространстве (геометрия Лобачевского) при  $\omega^2 = -1$ . В остальных частях диссертации А. П. Котельников рассматривает операции над бикватернионами в евклидовом пространстве, а также приложения их в геометрии и механике.

Дальнейшая деятельность А. П. Котельникова заключалась в распространении положений его магистерской диссертации на

самый общий случай, покрывающий как эллиптическое, так и гиперболическое пространства. Это составило предмет его докторской диссертации «Проективная теория векторов», защищенной в 1899 г. За эту диссертацию Ученый совет университета удостоил А. П. Котельникова степени доктора прикладной математики (механики), а затем и доктора чистой математики.

В основе всей механики лежит закон параллелограмма, которому подчиняются и силы, и скорости. Но параллельные прямые существуют только в евклидовом пространстве; в эллиптическом пространстве (на сфере) их нет совершенно, а в пространстве Лобачевского задача о проведении прямой, параллельной данной, не допускает единственного решения. Таким образом, возникает вопрос, каким образом нужно сформулировать закон параллелограмма, если рассматриваемое пространство не является евклидовым.

Закон параллелограмма можно выражать в двух формах.

Во-первых, сумма двух векторов  $\vec{a}$  и  $\vec{b}$  выражается диагональю параллелограмма, построенного на обоих векторах. Во-вторых, вместо параллелограмма можно взять треугольник  $OBC$  и сформулировать для него теорему синусов

$$\frac{a}{\sin \angle BOC} = \frac{b}{\sin \angle BCO} = \frac{c}{\sin \angle OBC}.$$

В неевклидовом пространстве можно пользоваться только второй формой, тем более что теорема синусов справедлива не только в прямолинейной, но и в сферической тригонометрии; разница лишь в том, что вместо длин сторон треугольника нужно брать их синусы. Это указывает еще на одно необходимое изменение: так как прямые являются геодезическими линиями только на плоскости, то нужно отказаться от прямолинейности сторон. Поэтому вектор будем рассматривать как упорядоченную комбинацию двух его точек  $\vec{OA}$ ,  $\vec{OB}$ ,  $\vec{OC}$ , не обращая внимания на вид линии, соединяющей эти точки. Определение действия сложения двух векторов

должно удовлетворять следующим условиям:

1. Необходимы распределительный, сочетательный и переместительный законы.

2. Если складываемые векторы находятся на одной прямой, то результат сложения выражается их алгебраической суммой.

3. Если длины складываемых векторов одинаковы и они образуют между собой угол  $2x$ , то вектор-сумма пойдет по направлению, образуемому со складываемыми

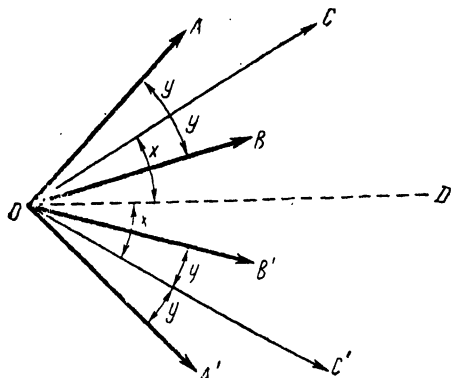


Рис. 41

мыми векторами одинаковые углы  $x$ . При этом, если «длины» складываемых векторов равны  $p$ , то «длина»  $R$  вектора-суммы выражается формулой

$$R = 2pf(x),$$

где  $f(x)$  — пока еще неизвестная функция угла  $x$ .

Для определения свойств этой функции воспользуемся следующим построением.

Пусть из точки  $O$  (рис. 41) в одной плоскости проведены четыре одинаковых прямых  $OA, OA', OB, OB'$ , и пусть углы  $AOB$  и  $A'OB'$  равны каждый  $2y$ . Пусть  $OC$  и  $OC'$  — биссектрисы этих углов и угол между ними равен  $2x$ . Проводим биссектрису  $OD$  угла  $COC'$ . Пусть  $p$  — длина каждого вектора  $OA, OB, OA', OB'$ ; требуется определить вектор-сумму этих четырех векторов.

Если сочетательный закон действителен, то можно произвольно комбинировать складываемые векторы.

Сначала сложим векторы  $OA$  и  $OA'$ : их сумма имеет направление прямой  $OD$  и равна  $2pf(x+y)$ . Сумма  $OB$  и  $OB'$  тоже пойдет по  $OD$  и будет иметь величину  $2pf(x-y)$ . Поскольку полученные суммы лежат на одной прямой, то окончательная сумма всех четырех векторов тоже имеет направление этой прямой и равна их алгебраической сумме

$$2pf(x+y) + 2pf(x-y).$$

Эту же сумму можно получить, если сложить сначала векторы  $OA$  и  $OB$ , а затем  $OA'$  и  $OB'$ . Сумма первых векторов пойдет по  $OC$  и равна  $2pf(y)$ , а сумма двух вторых векторов, равная тоже  $2pf(y)$ , пойдет по  $OC'$ . Так как  $OD$  является биссектрисой угла  $COC'$ , то окончательная сумма тоже пойдет по этой прямой и равна

$$2 \cdot [2pf(y)] f(x).$$

Теперь для определения вида  $f$  имеем равенство

$$2pf(x+y) + 2pf(x-y) = 2 \cdot 2pf(x) f(y)$$

или

$$f(x+y) + f(x-y) = 2f(x) f(y). \quad (a)$$

Если использовать формулу тригонометрии

$$\cos(\alpha + \beta) + \cos(\alpha - \beta) = 2 \cos \alpha \cos \beta,$$

то в качестве функции, удовлетворяющей условию (a), можно взять функцию  $\cos kx$ , где  $k$  может иметь любое значение. Если  $k = 1$ , то  $f(x) = \cos x$  и сумма двух векторов, равных  $p$  и образующих между собой угол  $2x$ , равна  $2p \cos x$ , т. е. получаем теорему параллелограмма векторов в евклидовом пространстве. Если  $k > 1$ , то получаем закон сложения в эллиптическом пространстве, а при  $k < 1$  — в гиперболическом.

Если теорема доказана для сложения двух равных сил, то нетрудно провести доказательство и для неравных сил.

Покажем, как изменится параллелограмм, если складываемые векторы расположены в эллиптическом пространстве, в котором действуют законы сферической геометрии.

Пусть два вектора  $OA$  и  $OB$  приложены в одной точке  $O$  (рис. 42). Через три точки  $O, A, B$  проводим сферу; точку приложения  $O$  берем в качестве полюса и проводим для него большой круг (экватор)  $CDC'$ . Через точки  $A$  и  $B$  — концы векторов — проводим меридианы  $OAC'$  и  $OB D$  до пересечения их экватором. Затем соединяем большими кругами точки  $A$  и  $D, B$  и  $C'$ , находим точку  $E$  их пересечения; она и определит вектор  $OE$  — сумму  $OA$  и  $OB$ .

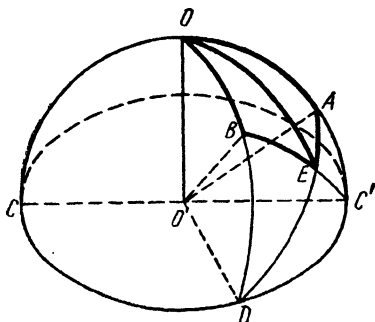


Рис. 42

Если радиус сделать равным бесконечности, то поверхность полусферы обратится в плоскость, проходящую через точку  $O$ , а центр  $O'$  экваториальной окружности и сама окружность уйдут в бесконечность. Дуги  $OA$  и  $OB$  обратятся в прямые линии, расположенные в плоскости  $OAB$ . Дуга  $AD$ , которая теперь тоже станет прямой, пересечет меридиан  $OB D$  в бесконечно удаленной точке, т. е. станет параллельной прямой  $OB$ .

Точно так же дуга  $BC$  обратится в прямую, параллельную  $OA$ ; поэтому четырехугольник  $OAEB$  представляет параллелограмм, а диагональ  $OE$  этого параллелограмма и будет искомой суммой векторов  $OA$  и  $OB$ .

Пользуясь законом двойственности проективной геометрии, можно еще дальше обобщить понятие о векторе. Так как некоторую точку пространства можно привести в соответствие с любой плоскостью при помощи определенного закона соответствия (что делается при построении диаграммы Кремоны), то любое соотношение, установленное для ряда точек, остается справедливым и в том случае, когда вместо отдельных точек подставлены плоскости, соответствующие этим точкам.

В курсах проективной геометрии очень часто делят страницы пополам: на одной половине доказывается теорема для системы точек, а на другой — та же теорема, в формулировке которой точки заменены соответствующими им элементами (в пространстве трех измерений плоскостями, а на плоскости — прямыми).

В качестве примера таких «двойственных теорем» можно привести самые простые; например, две точки на плоскости определяют прямую, проходящую через эти точки; равным образом две прямые на плоскости определяют точку, в которой они пересекаются, и т. д.

Исходя из этих соображений, А. П. Котельников ввел новые типы векторов. Так, например, поскольку точку можно заменить плоскостью, то можно рассматривать вектор, образованный двумя

плоскостями. Так как в пространстве двойственным образом для прямой будет тоже прямая (достаточно напомнить соответствующее свойство в диаграмме Кремоны), то линии действия вектора, определяемого двумя точками, при замене этих точек плоскостями будет соответствовать по закону двойственности прямая пересечения этих плоскостей. Полученный таким образом преобразованный вектор А. П. Котельников назвал ротором. Можно рассматривать векторы, образованные точкой и плоскостью, так называемые «мутовки»; это будет нечто аналогичное динаме, которая определяется силой и парой. Такие проективные соответствия ясно показывают сущность связей, которые имеются между векторами сил и угловых скоростей (и те, и другие складываются по закону параллелограмма), между динамическим (силовым) и кинематическим винтами, исследованию которых была посвящена первая работа А. П. Котельникова.

После защиты диссертации А. П. Котельников избирается по конкурсу заведующим кафедрой механики в открытом в 1898 г. Киевском политехническом институте. На основании прочитанных им лекций он пишет курс механики, или, вернее, два курса: «Механика», которая соответствует материалу, читавшемуся тогда на первом курсе высших технических учебных заведений (в Московском высшем техническом училище этот курс носил название «Теоретическая механика»), и «Аналитическая механика», содержащая материал, читавшийся на втором курсе. В этих курсах следует отметить применение векторной алгебры, правда, еще не совсем полное, так как для скалярного произведения двух векторов А. П. Котельников пользуется обычным в то время названием геометрического.

В 1904 г. А. П. Котельников возвращается в Казань, где он получает кафедру математики в Казанском университете, которую он занимает до 1914 г. К этому времени относится написанный им «Курс аналитической геометрии», в котором тоже применяется векторное исчисление.

В 1914 г. А. П. Котельников начинает работать на кафедре математики Киевского университета. Он читает лекции по высшей математике для студентов естественного отделения, а также специальные курсы (начертательную дифференциальную, проективную и неевклидову геометрию). С 1920 по 1924 г. он читает курс механики в Киевском политехническом институте, а также преподает математику на Высших женских курсах.

В 1924 г. А. П. Котельников переезжает в Москву, где начинает читать курс теоретической механики в Московском высшем техническом училище.

В эти годы шла перестройка педагогической работы на кафедре теоретической механики. Начиная с 1921 г. организуются групповые занятия по основным предметам, в том числе и по теоретической механике, и приглашается большое число новых преподавателей. Затем пересматривается программа курса механики: выбрасывается теория планетных движений и заменяется теорией коле-

баний; устраняется деление на теоретическую и аналитическую механику и устанавливается единый курс, читающийся два года; на двух первых семестрах читается статика и полный курс кинематики, в который включается материал, требовавший знания высшей математики и читавшийся ранее в «Аналитической механике».

Читавшееся на первом курсе краткое введение в динамику устраняется и передается на второй курс, где полностью в течение двух семестров читается весь курс динамики. Программу последнего курса тоже приходится перестраивать: вследствие необходимости согласования с чтением курса высшей математики перераспределяется учебный материал механики, т. е. вместо обычного деления на динамику точки (третий семестр) и динамику системы (четвертый семестр) на третьем семестре читаются общие теоремы динамики без разделения на динамику точки и динамику системы, а на четвертом семестре излагаются главным образом задачи интегрирования дифференциальных уравнений динамики тоже без разделения на динамику точки и системы.

Кафедру механики на механическом факультете Московского высшего технического училища А. П. Котельников занимал двадцать лет.

Кроме МВТУ А. П. Котельников вел курсы теоретической механики и в других московских вузах: в институте инженеров транспорта, в химико-технологическом институте, в Московском лесотехническом институте, в Московском энергетическом институте, а также и в бывшем Комиссаровском, а потом Ломоносовском институте до его преобразования в Московский вечерний рабочий институт. Кроме этого, в 1930—1932 гг. он был одним из активных организаторов Высших инженерно-педагогических курсов, на которых он читал теоретическую механику.

Двадцатые годы ознаменовались еще одной реформой в изложении механики — введением векторного исчисления. Инициатором этого направления в московских вузах был профессор Московского университета Н. Н. Бухгольц, начавший читать лекции по механике в векторном изложении с самого начала 20-х годов, когда он заменил в университете Н. Е. Жуковского. В МВТУ это произошло несколько позднее, примерно около 1925 г., причем большую роль в этом деле играл профессор математики на энергетическом факультете МВТУ Я. Н. Шпильрейн. Его инициативу поддержали А. И. Некрасов и А. П. Котельников, который уже применял такое изложение в Киевском университете.

С 1930 г. А. П. Котельников получает возможность уделять гораздо больше времени чисто научной работе. К 20-м годам относится его работа «Принцип относительности и геометрия Лобачевского», опубликованная в 1927 г. в сборнике, посвященном памяти Н. И. Лобачевского, но задуманная ранее: он доказывал ее в 1923 г. на заседании Московского математического и в 1926 г. на заседании Казанского физико-математического обществ.

В 1927 г. А. П. Котельников выступил с докладом о точках Бурместера, относящихся к кинематике плоских механизмов, и в том

же году в «Трудах МММИ им. Баумана» (тогдашнее название МВТУ) опубликовал «Заметку о графической динамике».

С 1930 г. А. П. Котельников начинает работать в Центральном аэро-гидродинамическом институте, где он занимается редактированием Полного собрания сочинений Н. Е. Жуковского. При этом он не ограничивается редактированием уже имеющегося текста, а занимается восстановлением работ Н. Е. Жуковского, которые еще не были закончены. Так, им была восстановлена работа «Действие волнующейся жидкости малой глубины на плавающие на ее поверхности тела» по черновикам Н. Е. Жуковского, в значительной части состоявшим только из одних математических вычислений без каких бы то ни было пояснений. К этой работе он добавил приложение, дополняющее результаты, полученные Н. Е. Жуковским, а также провел специальное исследование давления жидкости на тело, качающееся на волнах; последняя задача не была решена Н. Е. Жуковским, но данные им формулы позволили А. П. Котельникову решить ее до конца.

А. П. Котельников принял также участие в работе над изданием Собрания сочинений Н. И. Лобачевского, для которого им было написано несколько статей, в частности «Некоторые применения идей Лобачевского в механике и физике».

А. П. Котельников является одним из ведущих механиков XX в., когда неевклидова геометрия и новые пространственные образы играют в механике и в физике не меньшую роль, чем основные понятия классического анализа.

## И. В. МЕЩЕРСКИЙ. К. Э. ЦИОЛКОВСКИЙ. МЕХАНИКА ТЕЛ ПЕРЕМЕННОЙ МАССЫ

В России сложилась еще одна отрасль теоретической механики — динамика тел, масса которых не остается постоянной во время движения. Простейшим примером такого тела является обыкновенная ракета, которая движется за счет выброса заключенных в ней пороховых газов.

Ракеты были изобретены еще в XI в. Европейцы познакомились с ракетами только в конце XVIII в. во время войны в Индии; здесь ракеты употреблялись даже в военном деле. Большей частью они применялись как осветительные: пущенная ракета разрывалась в высоте и освещала довольно большое пространство внизу. Были также спасательные ракеты, при помощи которых на терпящее крушение судно перебрасывалась веревка, сначала небольшая, а потом привязанная к ней более толстая, позволявшая установить связь с экипажем корабля. Все эти приспособления были в достаточной степени примитивны и никакой теории не требовали.

Первым человеком, у которого возникла мысль об использовании ракеты как двигателя для перемещения по воздуху больших и тяжелых тел, был русский революционер Н. И. Кибальчич (1854—1881), член «Народной Воли», организовавший террор против царской власти. Он возглавил техническую часть, работая



*И. В. Мещерский (1859—1935)*

в качестве заведующего лабораторией, изготавливавшей бомбы. Арестованный по делу об убийстве Александра II, он признал свое участие в террористических действиях и объявил себя социалистом. На суде он сообщил о сделанном им изобретении воздухоплавательного снаряда, в судьбе которого он был очень заинтересован. Находясь в камере смертников, он составил проект двигателя и просил передать его на обсуждение ученым. Конечно, министерство внутренних дел не обратило на его открытие никакого внимания, и написанный им проект был найден в делах жандармского управления только после революции: его снаряд оказался построенным по принципу ракетного двигателя.

Хотя проект Н. И. Кибальчича остался неизвестным, основная его идея не заглохла: за ее разработку взялись двое русских ученых: *И. В. Мещерский (1859—1935)* и *К. Э. Циолковский (1857—1935)*.

И. В. Мещерский родился в Архангельске. В 1878 г. он поступил на физико-математический факультет Петербургского университета, по окончании которого был оставлен при университете для подготовки к профессорской деятельности; в 1890 г. начал преподавать в качестве приват-доцента кафедры теоретической механики. В это время он занимается вопросами динамики тела переменной массы. Его занимала задача, поставленная в астрономических кругах еще в 1866 г., когда возникла необходимость объяснить вековое ускорение Луны в ее движении по орбите. Часть наблюдавшегося ускорения можно было, как показал еще Лаплас, объяснить уменьшением эксцентриситета земной орбиты, но еще оставалась некоторая величина, которую хотели объяснить увеличением массы Земли от падающих на нее метеоритов. Для возможности этого объяснения нужно было составить уравнение движения тела, масса которого изменяется с течением времени; соответствующее уравнение и было дано И. В. Мещерским в 1897 г. в его магистерской диссертации «Динамика точки переменной массы». В дальнейшем он рассмотрел и общий случай в статье, опубликованной в «Известиях Петербургского политехнического института» (т. I, 1904) под заглавием «Уравнения движения точки переменной массы в общем случае».

В 1902 г. он был приглашен руководить кафедрой теоретической механики в только что основанном Петербургском политехническом

институте; в нем и протекала его дальнейшая работа. Всемирную известность получил составленный под его руководством сборник задач по теоретической механике, который и до сих пор употребляется в высших технических учебных заведениях как в нашей стране, так и за границей. Отличительной чертой этого сборника является техничность приведенных в нем задач, особенно в отделе, посвященном статике; в подобных сборниках за границей задачи носили гораздо более абстрактный характер.

Основную задачу движения ракеты можно сформулировать так.

Тело массой  $m$  находится под действием некоторой силы  $F$  и во время движения отбрасывает из своего состава материальные частицы с относительной скоростью  $u$ , теряя в секунду массу  $\mu$ . Требуется составить дифференциальное уравнение движения этого тела.

Обозначим  $\Phi$  неизвестную реактивную силу, обусловленную истечением массы. Основное уравнение динамики имеет вид

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} + \bar{\Phi}.$$

Разобьем  $d\bar{v}$  на две части:  $d\bar{v} = d\bar{v}_1 + d\bar{v}_2$ , из которых  $d\bar{v}_1$  — приращение от действия силы  $F$ , а  $d\bar{v}_2$  — приращение от действия реактивной силы  $\Phi$ . Пользуясь принципом независимости действия сил, получаем

$$m \frac{d\bar{v}_1}{dt} = \bar{F}, \quad (1)$$

что полностью определяет  $d\bar{v}_1$ .

Так как теперь можно считать силу  $\bar{F}$  исключенной, то реактивную силу  $\Phi$  и приращение  $d\bar{v}_2$  можно определить из предположения, что на систему не действуют никакие силы, следовательно, ее количество движения должно оставаться постоянным.

Пусть масса  $m$  движется со скоростью  $\bar{v}$ , и за время  $dt$  с относительной скоростью  $\bar{u}$  от нее отделяется масса  $dm$ ; остающаяся часть  $m - dm$  получает приращение  $d\bar{v}_2$ . Так как количество движения системы остается одним и тем же до и после отделения  $dm$ , то

$$m\bar{v} = (m - dm)(\bar{v} + d\bar{v}_2) + dm(\bar{v} + \bar{u}).$$

После очевидных сокращений

$$0 = m d\bar{v}_2 + \bar{u} dm - dm d\bar{v}_2.$$

Разделив уравнение на  $dt$  и отбросив бесконечно малые, получаем

$$m \frac{d\bar{v}_2}{dt} = -\mu \bar{u}, \quad (2)$$

где  $dm/dt$  является секундной массой  $\mu$ . Сложив (1) и (2), получаем уравнение Мещерского

$$m \frac{d\bar{v}}{dt} = \bar{F} - \mu \bar{u}. \quad (3)$$

Второе слагаемое является искомой реактивной силой, которая пропорциональна секундной массе и скорости отбрасывания  $\bar{u}$  и направлена противоположно этой скорости.

Если отбрасывание массы заменить приращением (случай И. В. Мещерского), то в уравнении знак при  $dm$  следует изменить на обратный.

*К. Э. Циолковский* родился 17 сентября 1857 г. в селе Ижевское Рязанской губернии, где его отец, по-видимому, высланный царским правительством польский дворянин, работал лесничим. Десяти лет от роду К. Э. Циолковский теряет слух и уже не может учиться в школе, но продолжает самостоятельно учиться, работая в библиотеках. В 1879 г. отец уходит в отставку, а К. Э. Циолковский сдает экзамены на звание учителя средней школы. В это время у него возникают мысли о полетах в космос, и он начинает «составлять астрономические чертежи»; его беспокоит вопрос о невесомости, и он проводит опыт над действием центробежной силы на различных животных.

В 1880 г. К. Э. Циолковский получает назначение уездного учителя в город Боровск. Здесь дом его полон различных физических приборов; молодой учитель начинает размышлять над кинетической теорией газов. Первая его работа «Теория газов» была направлена в Петербургское физико-химическое общество. Работа понравилась докладчику профессору фан-дер Флиту и было постановлено «ходатайствовать о переводе г. Циолковского в такой город, где он мог бы пользоваться научными пособиями».

Основными задачами, над решением которых работал К. Э. Циолковский, были две: о цельнометаллическом дирижабле и о полетах в космос. И содержание и методика разработки этих проблем были совершенно различными, что иллюстрирует многогранность таланта К. Э. Циолковского.

В самом конце XIX в. были сделаны попытки построить управляемые воздушные корабли, которые, работая по принципу «легче воздуха», отличались бы от воздушных шаров своими размерами, грузоподъемностью и прежде всего управляемостью (дирижаблей). В первом десятилетии XX в. был достигнут определенный успех в этом направлении: появились так называемые «цеппелины». Основным недостатком этих кораблей было то, что их приходилось наполнять легким газом, как правило, водородом, в высшей степени горючим (только во время первой мировой войны немцы применяли в очень ограниченных размерах гелий). Если оболочка корабля будет легкой, не металлической, то на управляемом дирижабле искры от работы газовых двигателей (даже внутреннего сгорания), попавшие в оболочку, могли зажечь и ее и находящийся внутри водород, что приводило к неминуемой катастрофе.

Чтобы устранить эту возможность, К. Э. Циолковский предложил строить дирижабли с металлической оболочкой. Его проект и

построенные модели различной величины были представлены на Третий Воздухоплавательный съезд в апреле 1914 г. и продемонстрировали конструкторское искусство докладчика. Бывший на съезде Н. Е. Жуковский внимательно прослушал весь доклад и похвалил придуманные К. Э. Циолковским устройства скрепления отдельных частей металлической оболочки дирижабля, обеспечивающие необходимую герметичность.

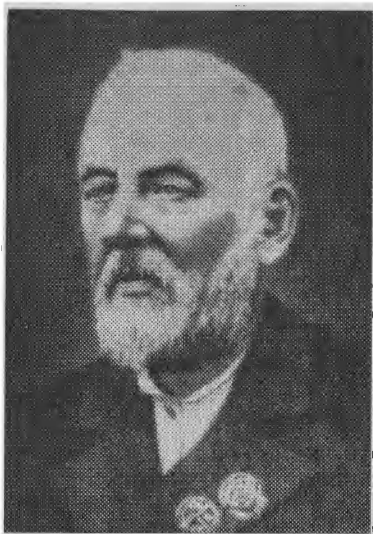
В 1919 г. К. Э. Циолковский обратился в штаб Южного фронта с предложением ввиду разрухи железнодорожного движения начать строительство металлических дирижаблей, выражая полное согласие, несмотря на возраст (ему шел 61 год), отправиться в любое

место, где будут строиться дирижабли его системы. Конечно, в то время это предложение не могло иметь успеха, так как первая мировая война очень способствовала развитию самолетов, строившихся по принципу «тяжелее воздуха», — так называемых «аэропланов». Однако в мирной обстановке, как думали некоторые советские специалисты, дирижабли могли оказаться более экономичными для транспорта грузов, так что идеи К. Э. Циолковского еще могут оказаться применимыми.

Самолеты «тяжелее воздуха» могли летать в довольно плотной среде, но конечно не в разреженном воздухе (стратосфере), а тем более в космическом пространстве; идея же о полетах на другие небесные тела была с давних пор заветной мечтой К. Э. Циолковского.

Решающим в достижении успеха — пока еще чисто теоретического — был 1897 год. В этом году К. Э. Циолковский познакомился с брошюрой петербургского изобретателя А. П. Федорова «Новый способ полета, исключаящий атмосферу как опорную среду». Эта брошюра, как говорил сам К. Э. Циолковский, произвела на него такое же действие, как на Ньютона его падающее яблоко. Он понял, что имеет в руках принцип, позволяющий осуществить космические полеты. Он стремительно начал разрабатывать теорию ракетного двигателя и, закончив вывод, поставил дату: 10 мая 1897 г.

Его спешка, как в свое время спешка Галилея при выпуске «Звездного Вестника», была вполне обоснованной, так как в том же



*К. Э. Циолковский (1857—1935)*

году 10 октября 1897 г. И. В. Мещерский защитил магистерскую диссертацию «Динамика точек переменной массы», представлявшую итог его исследований, проводившихся с 1893 г.

Однако между работами обоих ученых есть и существенная разница: для И. В. Мещерского это была новая и интересная задача теоретической механики, которую можно было решать или не решать, и эту тему И. В. Мещерский не исследовал. Но для К. Э. Циолковского это был лишь первый шаг в разработке большого и важного дела — в освоении космических полетов.

Меняется и характер работы: в создании цельнометаллического дирижабля было очень много технического мастерства для уже готовой теории. К. Э. Циолковский строит теорию космического полета, делает экономические расчеты и обдумывает наиболее подходящие методы конструкции, сохранившиеся и до сих пор: современная ракета-носитель родилась в мозгу Циолковского. Теперь в противоположность своим первым изобретениям К. Э. Циолковский никаких вещественных моделей не строит, все решает теория и расчеты, а практические модели строят уже ученики.

Среди этих учеников прежде всего следует назвать того, кто первый осуществил на практике идеи Циолковского. Это был советский инженер *Фридрих Цандер* (1887—1933). Он родился в Латвии, учился в Рижском политехническом институте, во время первой мировой войны был эвакуирован в Москву, где и остался работать. В 1930 г. он развернул опыты с построенным им первым реактивным двигателем ОРУ (опытный реактивный). Дальнейшая работа продолжалась в организованной при Осоавиахиме группе по изучению реактивного движения (ГИРД). Именно в этой группе и был построен первый настоящий двигатель на жидком топливе, который был пущен 25 ноября 1933 г.

Так началась линия развития космических полетов, приведшая к запуску 12 апреля 1961 г. первой космической ракеты с человеком «Восток-9». Для теоретической механики наступила новая эра, в которой ведущая роль принадлежит советской науке и технике.

## ВОЗНИКНОВЕНИЕ ПРИНЦИПА ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

В настоящее время наряду с механикой Ньютона, выросшей в результате исследования движений планет и взаимодействия тел, не находящихся в непосредственном соприкосновении, появилась теория электромагнитного поля, обнимающая электростатику, электродинамику и электромагнитную теорию света, причем эта новая область по своей математической разработанности и подтверждении опытом ничуть не уступала Ньютоновой. В каком отношении будут стоять друг к другу эти две области физического знания? Сможет ли Ньютонова механика объяснить электромагнитные явления или нет?

Долгое время обе эти новые отрасли физики развивались равномерно. Новая наука подсказала возможное решение задачи об абсолютно неподвижной системе отсчета: это эфир, в котором про-

исходят все электромагнитные колебания. То, что силы взаимодействия между током и магнитом не являются действующими по одной прямой, можно объяснить наличием между ними силового поля, играющего роль передаточного механизма между магнитом и током. Решающее значение здесь принадлежит опыту.

Первым опытом, произведенным в этом направлении, был следующий: если эфир представляет абсолютно неподвижную систему отсчета, то нужно установить, каким образом определяется относительно эфира движение материальных объектов, например Земли, движущейся вокруг Солнца и вместе с Солнцем. Для этой цели и был произведен в 1880 г. знаменитый опыт американских физиков Майкельсона и Морлея. Идею этого опыта можно разъяснить так.

Для определения скорости моторной лодки в воде или самолета в воздухе они должны описать некоторый замкнутый контур, длина которого известна; при этом необходимо знать время, за которое описывается круг. В спокойной воде или в безветренную погоду искомая скорость определяется простым делением пройденного пути на время движения. Определим, как изменится результат, если опыт производится в среде, двигающейся с некоторой скоростью.

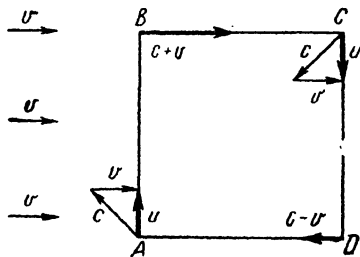


Рис. 43

Пусть рассматриваемый контур представляет квадрат  $ABCD$  (рис. 43) со стороной  $d$ . По его периметру летит самолет, скорость которого в спокойном воздухе равна  $c$ . Требуется найти время  $T$  облета, если слева направо дует ветер с постоянной скоростью  $v$ .

При полете от  $A$  до  $B$  самолету надо брать несколько влево, чтобы его абсолютная скорость  $u$ , равная геометрической сумме  $v$  и  $c$

$$u = \sqrt{c^2 - v^2},$$

была направлена по прямой  $AB$ .

Соответствующее время полета

$$T_1 = \frac{d}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

При полете от  $B$  до  $C$  абсолютная скорость  $c + v$  и соответствующее время

$$T_2 = \frac{d}{c + v}.$$

При полете от  $C$  до  $D$  самолет опять уклоняется влево, поэтому скорость опять  $\sqrt{c^2 - v^2}$ , а соответствующее время

$$T_3 = \frac{d}{\sqrt{c^2 - v^2}}.$$

От точки  $D$  до  $A$  самолет летит против ветра, его абсолютная скорость равна  $c - v$  и время полета

$$T_4 = \frac{d}{c - v}.$$

Имеем

$$T' = T_1 + T_3 = \frac{2d}{\sqrt{c^2 - v^2}} = \frac{2d}{c} \frac{1}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \quad (1)$$

$$T'' = T_2 + T_4 = \frac{d}{c + v} + \frac{d}{c - v} = \frac{2dc}{c^2 - v^2} = \frac{2d}{c} \frac{1}{1 - v^2/c^2}. \quad (2)$$

Как видно, отрезки  $T'$  и  $T''$  каждый в отдельности больше времени полета в спокойном воздухе  $\frac{2d}{c}$ , кроме того, время

$$T'' = T' \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} \quad (3)$$

больше времени  $T'$  движения по направлению, перпендикулярному скорости  $v$ .

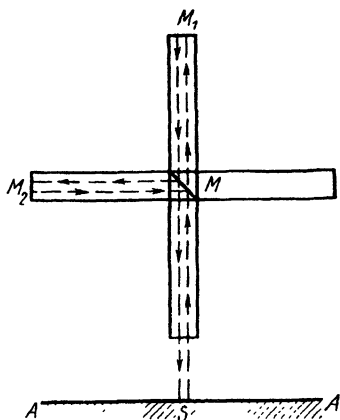


Рис. 44

Опыт Майкельсона был поставлен так: на жесткой подставке, плававшей в ртути, укреплены источник света  $S$  и три зеркала  $M, M_1, M_2$  (рис. 44). Свет, идущий от источника  $S$ , расщепляется полупрозрачным зеркалом  $M$  на два луча: один из них идет к  $M_1$ , отражается и идет к экрану  $AA'$ ; другой проходит к  $M_2$ , отражается в  $M$ , еще раз отражается и идет к  $AA'$ . Оба отрезка  $MM_1$  и  $MM_2$  равны; если  $MM_1$  перпендикулярен к направлению скорости  $v$  Земли в ее движении вокруг Солнца и со всей Солнечной системой, то время прохождения отрезка  $MM_1$  вперед и назад определяется формулой (1), а время прохождения отрезка  $MM_2$  — формулой (2).

Так как  $T''$  больше  $T'$ , то оба луча, пересекаясь на экране, образуют интерференционные полосы. Вращая площадку вокруг центра и наблюдая за изменением интерференционных полос, Майкельсон предполагал обнаружить направление и величину скорости Земли по отношению к эфиру.

Однако в действительности никакого изменения полос не наблюдалось; все обстояло так, как если бы Земля совершенно не двигалась и никакого «эфирного ветра» не было, а распространение света по обоим взаимно перпендикулярным направлениям  $MM_1$  и  $MM_2$  занимало бы одинаковое время. Для объяснения этого ре-

зультата было предположено, что размеры тел по направлению эфирного ветра сокращаются в обратном отношении времен, а именно  $\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}} = \alpha$ . Это сокращение, если бы оно имелось, ком-

пенсировало бы ожидаемый эффект, но привело бы к появлению в стержне сжимающих напряжений, которые тоже не наблюдались. Так как возможность притяжения Землей эфира, а также влияние скорости источника света (которую надо было бы прибавлять к скорости света) были заранее исключены предшествующими опытами, то скорость света в пустоте остается одинаковой во всех направлениях и не подчиняется законам сложения скоростей классической механики.

Таким образом, образовались две вполне сформировавшиеся системы: классическая механика Ньютона, сложившаяся на основании наблюдений так называемых механических движений, и электродинамика Максвелла, описывающая совершенно точно течение электромагнитных явлений. Можно считать, что в области движущихся систем отсчета механические и электромагнитные процессы ведут себя неодинаково.

Рассмотрим наблюдателя, мимо которого проходит поезд: если в вагоне этого поезда без начальной скорости падает тяжелое тело, то наблюдатель увидит это тело движущимся по параболе. Пересадим теперь наблюдателя на поезд и заставим его смотреть на тело, находящееся на станции и тоже падающее без начальной скорости; он тоже увидит это тело движущимся по такой же параболе: происходит действие так называемого закона относительности Галилея.

Теперь рассмотрим заряженный проводник, рядом с которым имеется точечный заряд электричества. Если проводник и заряд неподвижны, то неподвижному наблюдателю может показаться, что проводник образовал электростатическое поле, действующее на этот заряд. Если наблюдатель пойдет с некоторой скоростью относительно проводника, то при неподвижных проводнике и заряде ничего не изменится. Если же наблюдатель неподвижен, а проводник и заряд двигаются, то согласно закону Максвелла движущийся заряд дает так называемый конвекционный ток, который действует совершенно так же, как и обыкновенный электрический ток, но только очень слабый. Так как электрическое поле сменится теперь электромагнитным, то явления получают совершенно иной характер, отличный от того, который наблюдался при механических движениях.

Сложение скоростей в механике связано с изменением систем отсчета: абсолютная скорость равна сумме переносной скорости (подвижной системы отсчета) и относительной (по отношению к подвижной системе отсчета).

Пусть  $S_1$  — неподвижная система отсчета с началом  $O_1$ ; по ее оси  $O_1x$  движется с постоянной скоростью  $v_0$  подвижная система отсчета  $S_2$  с началом  $O_2$ , имеющая форму прямой, скользящей по

оси  $O_1x$ ; по этой прямой движется точка, расстояние от которой до начала  $O_2$  равно  $x_2$  (относительное движение), а до  $O_1$  (абсолютное движение) равно  $x_1$ . Пусть в начальный момент  $t = 0$  точки  $O_1$  и  $O_2$  совпадают; тогда переход от системы  $S_1$  к системе  $S_2$  выразится следующими уравнениями:

$$x_1 = x_2 + v_0 t; \quad y_1 = y_2; \quad z_1 = z_2.$$

При этом считаем, что время одинаково протекает как в системе  $S_1$ , так и в системе  $S_2$ ; можно выразить это, если добавить еще одно, четвертое уравнение:

$$t_1 = t_2.$$

Приведенные четыре уравнения (так называемые галилеевы преобразования) заменим другими, которые более правильно описывали бы совершающиеся события. Основное требование, которому должны удовлетворять новые уравнения, берем из опыта Майкельсона; он показывает, что во всякой системе отсчета, движущейся или неподвижной, скорость света должна иметь постоянную величину  $c$ .

В тот момент, когда начала обеих систем  $S_1$  и  $S_2$  совпадают, пустим из общего начала световой сигнал. Его движение в обеих системах определим по формулам

$$x_1 = ct_1; \quad x_2 = ct_2.$$

Так как система  $S_2$  движется по отношению к  $S_1$ , то  $x_1$  больше, чем  $x_2$ ; это показывает, что  $t_1$  тоже больше, чем  $t_2$ ; поэтому неравенство времен  $t_1$  и  $t_2$  в обеих системах является правильным; в движущейся системе время, а также и все процессы изменения протекают медленнее, чем в неподвижной.

Если возведем правые и левые части последних двух уравнений в квадрат, то

$$x_1^2 - c^2 t_1^2 = x_2^2 - c^2 t_2^2. \quad (a)$$

Это тождество соблюдается в обеих системах; ему и должны удовлетворять формулы преобразования. Так как координаты  $y$  и  $z$  остаются неизменными, то достаточно получить лишь формулы для  $x$  и  $t$ .

Можно потребовать также, чтобы зависимости между  $x$  и  $t$  выражались простыми линейными функциями:

$$x_2 = ax_1 + bt_1; \quad t_2 = kx_1 + nt_1.$$

Кроме тождества (a) можно поставить еще и такие требования:

1) коэффициенты  $a$ ,  $b$ ,  $k$ ,  $n$  должны, как и в галилеевых преобразованиях, зависеть только от относительной скорости  $v_0$  обеих систем;

2) при  $x_2 = 0$  они должны иметь  $x_1 = v_0 t_1$ .

Последнее условие показывает, что

$$ax_1 + bt_1 = 0; \quad x_1 = -\frac{b}{a} t_1 = v_0 t_1,$$

откуда

$$b = -av_0.$$

Теперь формулы принимают вид

$$x_2 = a(x_1 - v_0 t_1); \quad t_2 = kx_1 + nt_1.$$

Возведем  $x_2$  и  $t_2$  в квадрат и подставим их значения в (а):

$$x_1^2 - c^2 t_1^2 = a^2 (x_1 - v_0 t_1)^2 - c^2 (kx_1 + nt_1)^2;$$

сравнивая в обеих частях коэффициенты при  $x_1^2$ ,  $x_1 t_1$  и  $t_1^2$ , получаем

$$a^2 - c^2 k^2 = 1; \quad a^2 v_0 + knc^2 = 0;$$

$$a^2 v_0^2 - c^2 n^2 = -c^2.$$

Решая эти уравнения, находим

$$a = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \alpha; \quad k^2 = \frac{v_0^2}{c^4} \frac{1}{1 - \frac{v_0^2}{c^2}},$$

откуда

$$k = \pm \frac{v_0}{c^2} \alpha$$

и

$$n = \mp \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} = \mp \alpha.$$

Уравнения принимают вид

$$x_2 = \alpha (x_1 - v_0 t_1); \quad t_2 = \alpha \left( \pm \frac{v_0}{c^2} x_1 \mp t_1 \right).$$

Если требуется, чтобы  $t_1$  и  $t_2$  изменялись в одном направлении, то нужно взять нижние знаки:

$$t_2 = \alpha \left( t_1 - \frac{v_0}{c^2} x_1 \right).$$

Полученные преобразования носят название преобразований Лоренца.

Обратные преобразования получим, если изменим знак  $v_0$ :

$$x_1 = \alpha (x_2 + v_0 t_2); \quad t = \alpha \left( t_2 + \frac{v_0}{c^2} x_2 \right).$$

Если величина  $v_0$  очень мала по сравнению с величиной  $c$ , то эти уравнения принимают вид

$$x_1 = x_2 + v_0 t_2; \quad t_1 = t_2.$$

Таким образом, галилеевы преобразования оказываются частным случаем лоренцовых.

Теперь уже нетрудно объяснить причину отрицательного результата опыта Майкельсона.

Возьмем уравнение, выражающее  $x_1$  через  $x_2$  и  $t_2$  и положим  $t_2 = 0$ . Тогда

$$x_2 = x_1 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Но  $x_2$  — это длина бруска в системе, для которой направление скорости  $v_0$  коллинеарно со скоростью света. Теория относительно-сти дает именно ту величину сокращения бруска, которая предпо-лагалась Лоренцем для объяснения неудачи опыта Майкельсона.

Равным образом, если в выражении для  $t_1$  положим  $x_2 = 0$ , то получится замедление времени в движущейся системе:

$$t_2 = t_1 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}.$$

Рассмотрен случай, когда скорость  $v_0$  имеет направление оси  $Ox$ . Можно взять и общий случай; тогда тождество (а) полу-чит вид

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 - c^2 t_1^2 = x_2^2 + y_2^2 + z_2^2 - c^2 t_2^2.$$

Если введем  $i = \sqrt{-1}$ , то приведенную формулу можно выразить так:

$$x_1^2 + y_1^2 + z_1^2 + (ict_1)^2 = \text{const.}$$

Выражение в левой части очень похоже на квадрат длины ра-диуса вектора точки в четырехмерном пространстве, где четвертая координата имеет выражение  $ict$ . Соответствующий радиус-вектор в таком четырехмерном пространстве носит название четырехвекто-ра. Последний можно было бы представить в виде кватерниона, если только взять скалярную часть в виде  $ict$ , а векторную — в виде трех действительных чисел, имеющих направления координатных осей.

Теперь рассмотрим, как нужно заменить закон сложения скоро-сти в классической механике.

Пусть переносная скорость равна  $v_0$ . Координатные оси подвиж-ной системы возьмем так, чтобы ось  $Ox_2$  совпадала с направлени-ем  $v_0$ . Пусть время неподвижной системы координат  $Ox_1y_1z_1$  рав-но  $t_1$ , а время подвижной системы  $t_2$ . Проекции относительной ско-рости на подвижные координатные оси

$$v_0^x = \frac{dx_2}{dt_2}; \quad v_0^y = \frac{dy_2}{dt_2}; \quad v_{0z} = \frac{dz_2}{dt_2};$$

проекции абсолютной скорости

$$v_a^x = \frac{dx_1}{dt_1}; \quad v_a^y = \frac{dy_1}{dt_1}; \quad v_a^z = \frac{dz_1}{dt_1}.$$

Дифференцируя уравнения Лоренца

$$x_1 = a(x_2 + v_0 t_2); \quad y_1 = y_2; \quad z_1 = z_2; \quad t_1 = a\left(t_2 + \frac{v_0}{c^2} x_2\right),$$

получаем:

$$dx_1 = \alpha (dx_2 + v_0 dt_2); \quad dy_1 = dy_2; \quad dz_1 = dz_2;$$

$$dt_1 = \alpha \left( dt_2 + \frac{v_0}{c^2} dx_2 \right).$$

Отсюда

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{dx_2 + v_0 dt_2}{dt_2 + \frac{v_0}{c^2} dx_2}.$$

Разделив числитель и знаменатель на  $dt_2$  и положив

$$\frac{dx_2}{dt_2} = v_0^x, \text{ получим}$$

$$\frac{dx_1}{dt_1} = \frac{v_0 + v_0^x}{1 + \frac{v_0 v_0^x}{c^2}}.$$

Аналогично

$$\frac{dy_1}{dt_1} = \frac{1}{\alpha} \frac{v_0^y}{1 + \frac{v_0 v_0^x}{c^2}};$$

$$\frac{dz_1}{dt_1} = \frac{1}{\alpha} \frac{v_0^z}{1 + \frac{v_0 v_0^x}{c^2}}.$$

Если  $v_0$  очень мало по сравнению со скоростью света  $c$ , то эти формулы переходят в обычные формулы сложения скорости классической механики:

$$v_a^x = v_0 + v_0^x; \quad v_a^y = v_0^y; \quad v_a^z = v_0^z.$$

Рассмотрим частный случай:  $v_0^x = c$ ,  $v_0^y = v_0^z = 0$ . Имеем:

$$v_{a0c} = \frac{v_0 + c}{1 + \frac{v_0}{c}} = c.$$

Как видно, скорость материальной частицы по отношению к любой системе отсчета не может быть больше скорости света. Если в классической механике увеличение скорости происходит совершенно одинаково, какая бы ни была величина начальной скорости, то здесь чем больше величина увеличиваемой скорости, тем труднее её дальнейшее увеличение; оно становится невозможным, если увеличиваемая скорость равна скорости света. Из этого можно сделать вывод, что мера инерции материальной точки — её масса — должна тоже возрастать с увеличением скорости.

Составим основное уравнение динамики Ньютона — сила равна произведению массы на ускорение — в двух системах: неподвижной  $Ox_1$  и подвижной  $Ox_2$ :

$$F = m_1 \frac{d^2 x_1}{dt_1^2} = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt_2^2}.$$

Имеем:

$$x_1 = \frac{x_2 + v_0 t_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}; \quad t_1 = \frac{t_2 + \frac{v_0}{c^2} x_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Положив в первом и втором уравнениях соответственно  $t_2 = 0$  и  $x_2 = 0$ , получим:

$$x_1 = \frac{x_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}; \quad t_1 = \frac{t_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}},$$

откуда после дифференцирования

$$dx_1 = \frac{dx_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}; \quad dt_1 = \frac{dt_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}};$$

$$d^2 x_1 = \frac{d^2 x_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Подставив эти результаты в выражение для силы  $F$ , получим:

$$m_1 \frac{d^2 x_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} : \left( \frac{dt_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}} \right)^2 = m_2 \frac{d^2 x_2}{dt_2^2},$$

откуда

$$m_1 \sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}} = m_2,$$

или

$$m_1 = \frac{m_2}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Но  $m_2$  — величина массы, которую видит наблюдатель, находящийся в подвижной системе и, следовательно, считающий ее покоящейся, а  $m_1$  — величина массы для наблюдателя, видящего ее движущейся со скоростью  $v_0$ . Если покоящуюся массу обозначим  $m_0$ , то величина  $m$  массы, движущейся со скоростью  $v_0$ , выразится формулой

$$m = \frac{m_0}{\sqrt{1 - \frac{v_0^2}{c^2}}}.$$

Так как дробь  $\frac{v_0}{c}$  мала, то эту формулу можно приближенно

представить так:

$$m = m_0 \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{c^2} \right),$$

или

$$m = m_0 + \frac{1}{2} \frac{m_0 v_0^2}{c^2}.$$

Но  $\frac{1}{2} m_0 v_0^2 = E$  — кинетическая энергия массы  $m_0$ , движущейся со скоростью  $v_0$ ; в таком случае увеличение  $m - m_0$  массы можно представить в виде

$$m - m_0 = \frac{E}{c^2}.$$

Но если увеличение массы равняется энергии, деленной на квадрат скорости света, то вполне естественно предположить, что величина покоящейся массы, которую можно выразить как  $m_0 - 0$ , рассчитывается по такой же формуле

$$m_0 - 0 = \frac{E}{c^2},$$

откуда

$$E = m_0 c^2.$$

Если масса  $m_0 = 1$  г, то

$$E = 1 \cdot (3 \cdot 10^{10})^2 = 9 \cdot 10^{20} \text{ эрг} = 9 \cdot 10^{13} \text{ дж} = 9 \cdot 10^{13} \text{ кгм}.$$

Не надо, однако, считать, что всю эту массу можно превратить в энергию; на основании закона сохранения тяжелых частиц (формула закона сохранения массы) масса покоя остается постоянной и в энергию может только перейти разность  $m - m_0$ , но и эта величина настолько велика, что ее практическое использование вызовет огромную разрушительную силу.

Как показано выше, в пространстве трех измерений основной инвариант

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = \text{const},$$

или, если положить для симметрии  $ict = u$ ,

$$x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = \text{const},$$

можно назвать пространственно-временным интервалом между двумя мировыми точками и строить геометрию этого мира как обыкновенную евклидову геометрию, но только в пространстве четырех измерений.

В этой геометрии координатные оси были бы прямыми, двумерные образы — плоскостями, а трехмерные образы, соответствующие значениям  $t$ , или  $u = \text{const}$ , представляли бы обыкновенные системы трех взаимно перпендикулярных осей со всеми точками, определяемыми при помощи этих осей. Представить все образы такой геометрии, конечно, нельзя, но изучать их свойства при помощи аналитической геометрии так же, просто, как и в обыкновенной

трехмерной геометрии. Структуру этого пространства можно разлагать на прямые, плоскости и трехмерные многообразия. В этом евклидовом пространстве все будет происходить совершенно так же, как и в обычном; находясь внутри какой-либо инерционной системы, нельзя заметить ее прямолинейного и равномерного движения. Но если система, в которой мы находимся, совершает неинерциальное движение, то можно это заметить, так как тогда появятся так называемые кориолисовы силы инерции.

Рассматривая знаменитый опыт Ньютона с вращающимся ведром, наполненным жидкостью, видим, что и Гюйгенс, а в XIX в. и Эрнст Мах указывали на недоказательность этого опыта для определения абсолютности такого движения. Возникшая при вращении Земли центробежная сила, обратившая Землю в сплюснутый эллипсоид вращения, могла иметь своим источником не абсолютное пространство, а лишь относительное вращение Земли, происходящее по отношению к системе неподвижных звезд. В 1917 г. Эйнштейн, разрабатывая общий принцип относительности, писал о том, что в последовательной теории относительности не может быть никакой инерции относительно пространства, а лишь инерция масс по отношению друг к другу. Если, следовательно, удалить какую-то массу достаточно далеко от всех других масс Вселенной, то ее инерция упадет до нуля.

В 1916 г. Эйнштейн формулировал так называемый общий принцип относительности, касающийся движения и неинерциальных систем.

Основные его положения заключаются в следующем.

Если рассматривается неинерциальное движение, например человек, поднимающийся с ускорением в лифте, то появляющаяся добавочная Кориолисова переносная сила инерции не может быть отличима от реальной силы веса человека. Кориолисова сила инерции обязана своим происхождением инертной массе человека, а его вес обуславливается гравитационной массой, входящей в выражение закона всемирного тяготения Ньютона. Но равенство инертной и гравитационной масс не позволяет отличить силу тяжести от силы инерции: Кориолисовы силы инерции можно объяснить наличием некоторого силового поля, и наоборот, силы тяжести можно объяснить соответствующим движением. Из этого следует, что силы тяжести являются столь же реальными, сколь и Кориолисовы силы инерции.

Это есть механика Герца, который заменил действующие силы связями и предположил, что тело будет всегда двигаться по «прямейшему» направлению.

Движение планет вокруг Солнца можно было бы объяснить не притяжением их Солнцем, а тем обстоятельством, что геодезическими линиями вокруг Солнца являются не прямые линии, а конические сечения, которые появляются вследствие того, что масса Солнца «искривляет» окружающее его пространство, причем это искривление производится не в трех измерениях, а в четырехмерном пространственно-временном мире.

Для построения новой механики требуется участие и неевклидовой геометрии, и вариационных принципов аналитической механики, и многомерной геометрии и, наконец, общей теории поля, которая могла бы включить и гравитационное, и электромагнитное, и все другие поля из физики элементарных частиц.

Таким образом, объем механики необычно расширяется; она все более и более стремится слиться с физикой, во всяком случае с ее теоретической частью; в результате этого слияния рождаются все новые и новые механики — статистическая, квантовая, волновая, релятивистская, а может быть, и другие. Из этого, конечно, не следует, что дальнейшее развитие Ньютоновой механики в строгом смысле этого слова нужно считать исключенным; при изложении основ теории относительности показано, что Ньютонова механика является механикой тел, движущихся со скоростями, относительно меньшими скорости света, а для исследования таких движений современная техника может представить огромное поле практических приложений.

## ЛИТЕРАТУРА

- Архимед. Сочинения. Пер. *И. Н. Веселовского*. М., Физматгиз, 1962.  
Белый Ю. А. Иоганн Кеплер. М., Изд-во АН СССР, 1971.  
Вавилов С. И. Исаак Ньютон. М., Изд-во АН СССР, 1945.  
Ван-дер-Варден Б. Л. Пробуждающаяся наука. Пер. *И. Н. Веселовского*. М., Физматгиз, 1959. Изд. 4. М.: КомКнига/URSS, 2010.  
Витрувий. Десять книг об архитектуре. Пер. *Ф. А. Петровского*. М., Изд-во Академии архитектуры, 1936. Изд. 3. М.: КомКнига/URSS, 2005.  
Веселовский И. Н. Аристарх Самосский. Коперник античного мира. Историко-астрономические исследования. Вып. VII. М., Изд-во АН СССР, 1961.  
Веселовский И. Н. Христиан Гюйгенс. М., Учпедгиз, 1959.  
Веселовский И. Н. Некоторые вопросы механики Л. Эйлера. Труды Института истории естествознания. Т. 19. М., ОНТИ, 1957.  
Галилео Галилей. Диалоги о двух главнейших системах мира — Птолемеевой и Коперниковой. Пер. *А. Н. Долгова*. М. — Л., Гостехиздат, 1948.  
Галилео Галилей. Беседы и математические доказательства, касающиеся двух новых наук. Пер. *А. Н. Долгова*. М. — Л., Гостехиздат, 1934.  
Голубев В. В. Николай Егорович Жуковский. М., Изд-во МГУ, 1947.  
Голубев В. В. Сергей Алексеевич Чаплыгин. М., Изд-во МГУ, 1951.  
Гюйгенс Хр. Три мемуара по механике. М., Изд-во АН СССР, 1951.  
Д'Аламбер Ж. Динамика. Пер. *Егоршина*. М. — Л., Государственное технико-теоретическое издательство, 1950.  
Дильтс Г. Античная техника. М. — Л., Гостехиздат, 1934.  
Жуковский Н. Е. Собрание сочинений. Т. 1—7. М. — Л., Гостехиздат, 1948—1958.  
Зубов В. П. Аристотель. М., Изд-во АН СССР, 1963.  
История механики с древнейших времен до конца XVII в. М., «Наука», 1971.  
История механики с конца XVIII века до середины XX в. М., «Наука», 1972.  
История отечественной математики. Т. II. Киев, «Наукова Думка», 1967.  
Ковалевская С. В. Научные работы. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1948.  
Ковалевская С. В. Воспоминания и письма. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1951.  
Кориолис Г. Математическая теория явлений бильярдной игры. Пер. *И. Н. Веселовского* и *М. М. Гернета*. М., Техтеоретиздат, 1956. Изд. 3. М.: Книжный дом «Либроком»/URSS, 2009.  
Котельников А. П. Винтовое исчисление и его приложения в механике. Казань, 1895.

- Крылов А. Н. Леонард Эйлер. Доклад на торжественном заседании АН СССР 5 октября 1933 г. М., Изд-во АН СССР, 1933.
- Кузнецов Б. Г. Галилей. М., «Наука», 1964.
- Лейбзон Л. С. Николай Егорович Жуковский. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1947.
- Лобачевский Н. И. Полное собрание сочинений. Т. 1—5. М., Гостехиздат, 1946—1951.
- Ляпунов А. М. Общая задача об устойчивости движения. М., ОНТИ, 1935.
- Мещерский И. В. Работы по механике переменной массы. М., Гостехиздат, 1952.
- Моисеев Н. Д. Очерки развития механики. М., Изд-во МГУ, 1961.
- Нейгебауэр О. Точные науки в древности. Пер. Е. В. Гохмана. М., «Наука», 1963. Изд. 4. М.: URSS, 2010.
- Ньютон И. Математические начала натуральной философии. Пер. А. Н. Крылова. СПб., Изд-во Морской Академии, 1916. Изд. 3. М.: Издательство ЛКИ/URSS, 2008.
- Остроградский М. В. Полное собрание сочинений. Т. 2, Киев, Изд-во АН УССР, 1964.
- Погребысский И. Б. От Лагранжа до Эйнштейна. М., «Наука», 1966.
- Розенфельд Б. А. Александр Петрович Котельников. Историко-математические исследования. Вып. 3. М., Физматгиз, 1956.
- Сретенский Л. Н. Динамика твердого тела в работах Эйлера (в юбилейном сборнике). М., Изд-во АН СССР, 1958.
- Старосельская-Никитина О. А. Очерки по истории науки и техники периода Французской буржуазной революции. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1946.
- Циолковский К. Э. Собрание сочинений. Т. 2. М., Изд-во АН СССР, 1954.
- Чаплыгин С. А. Избранные труды по механике и математике. М., Гостехиздат, 1954.
- Чебышев П. Л. Полное собрание сочинений. Т. 1—5. М. — Л., Изд-во АН СССР, 1944—1951.
- Черненко Г. Яблоко Циолковского. «Наука и жизнь», 1970, № 10.
- Эйлер Л. Основные динамики точки. Пер. В. С. Гохмана и С. П. Кондратьева. М. — Л., ОНТИ, 1938.

# ОГЛАВЛЕНИЕ

|                                                                                                                                 |     |
|---------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------------|-----|
| Предисловие . . . . .                                                                                                           | 3   |
| Введение . . . . .                                                                                                              | 5   |
| <b>Часть I. Античная механика</b>                                                                                               |     |
| Механика классической Греции. Два вида движения: естественное и насильственное. Аристотель и параллелограмм скоростей . . . . . | 7   |
| Архимед. Механические методы определения площадей, объемов и центров тяжести . . . . .                                          | 16  |
| Кинематика планетных движений . . . . .                                                                                         | 35  |
| Эллинистическая механика. Машинны. Золотое правило механики . . . . .                                                           | 50  |
| <b>Часть II. Создание классической механики</b>                                                                                 |     |
| Механика средневековья. Начало статики. Иордан Неморарий и Стевин . . . . .                                                     | 64  |
| Николай Коперник. Создание гелиоцентрической системы . . . . .                                                                  | 77  |
| Механика Галилея . . . . .                                                                                                      | 82  |
| Иоганн Кеплер. Установление основных законов планетных движений . . . . .                                                       | 90  |
| Рене Декарт. Формулировка закона инерции . . . . .                                                                              | 93  |
| Количество движения. Векторное понятие силы. Закон параллелограмма сил . . . . .                                                | 95  |
| Христиан Гюйгенс. Нормальное ускорение. Центробежная сила. Маятник . . . . .                                                    | 100 |
| Исаак Ньютон. Три закона движения . . . . .                                                                                     | 109 |
| Конец великого века . . . . .                                                                                                   | 122 |
| <b>Часть III. Развитие механики в XVIII в.</b>                                                                                  |     |
| Общий обзор. Развитие механики в России в XVIII в. . . . .                                                                      | 129 |
| Леонард Эйлер. Работы первого петербургского периода. «Механики» и «Морская наука» . . . . .                                    | 131 |
| Принцип Д'Аламбера. История его возникновения . . . . .                                                                         | 139 |
| Движение твердого тела. Работы Эйлера берлинского периода . . . . .                                                             | 149 |
| Жозеф-Луи Лагранж. Принцип возможных перемещений. Основания аналитической механики . . . . .                                    | 154 |
| Принцип наименьшего действия . . . . .                                                                                          | 165 |
| Сила как вектор . . . . .                                                                                                       | 170 |
| Пьер Симон Лаплас: Возникновение небесной механики . . . . .                                                                    | 176 |
| <b>Часть IV. Механика XIX в.</b>                                                                                                |     |
| Французская школа механики . . . . .                                                                                            | 184 |
| Луи Пуансо. Геометрическая статика . . . . .                                                                                    | 192 |
| Выделение кинематики в самостоятельную науку . . . . .                                                                          | 201 |
| Кинематика сплошной среды . . . . .                                                                                             | 206 |
| Принцип Гамильтона . . . . .                                                                                                    | 218 |
| Русская механика XIX в. . . . .                                                                                                 | 224 |
| А. М. Ляпунов. Устойчивость движения . . . . .                                                                                  | 230 |
| Н. Е. Жуковский. Возникновение экспериментальной аэродинамики . . . . .                                                         | 240 |
| С. А. Чаплыгин и его научная деятельность в Центральном аэро-гидродинамическом институте (ЦАГИ) . . . . .                       | 251 |
| А. П. Котельников. Казанская школа математиков . . . . .                                                                        | 258 |
| И. В. Мещерский. К. Э. Циолковский. Механика тел переменной массы . . . . .                                                     | 269 |
| Возникновение принципа относительности . . . . .                                                                                | 274 |
| Литература . . . . .                                                                                                            | 285 |

## Уважаемые читатели! Уважаемые авторы!

Наше издательство специализируется на выпуске научной и учебной литературы, в том числе монографий, журналов, трудов ученых Российской академии наук, научно-исследовательских институтов и учебных заведений. Мы предлагаем авторам свои услуги на выгодных экономических условиях. При этом мы берем на себя всю работу по подготовке издания — от набора, редактирования и верстки до тиражирования и распространения.



URSS

Среди вышедших и готовящихся к изданию книг мы предлагаем Вам следующие:

*Дорфман Я. Г.* Всемирная история физики: С древнейших времен до конца XVIII века.

*Дорфман Я. Г.* Всемирная история физики: С начала XIX до середины XX вв.

*Тимошенко С. П.* История науки о сопротивлении материалов.

*Горобец Б. С.* Круг Ландау: Жизнь гения.

*Горобец Б. С.* Круг Ландау: Физика войны и мира.

*Горобец Б. С.* Круг Ландау и Лифшица.

*Горобец Б. С.* Секретные физики из Атомного проекта СССР: Семья Лейпуниных.

*Хайтун С. Д.* История парадокса Гиббса.

*Абрамов А. И.* История ядерной физики.

*Богущ А. А.* Очерки по истории физики микромира.

*Милантьев В. П.* История возникновения квантовой механики и развитие представлений об атоме.

*Бетяев С. К.* Записки гидродинамика.

*Кадоццев С. Б.* Геометрия Лобачевского и физика.

*Жуковский Н. Е.* Механика системы. Динамика твердого тела.

*Жуковский Н. Е.* Аналитическая механика.

*Жуковский Н. Е.* Кинематика, статика, динамика точки: университетский курс.

*Чаплыгин С. А.* Исследования по динамике негидродинамических систем.

*Якоби К.* Лекции по динамике.

*Уиттекер Е. Т.* Аналитическая динамика.

*Мейс Дж.* Теория и задачи механики сплошных сред.

Серия «Физико-математическое наследие: физика (механика)»

*Вебстер А. Г.* Механика материальных точек, твердых, упругих и жидких тел. В 2 т.

*Вилла А.* Теория вихрей.

*Тимошенко С. П., Войновский-Кригер С.* Пластины и оболочки.

*Сокольников И. С.* Тензорный анализ: Теория и применения в геометрии и в механике сплошных сред.

*Кирпичев В. Л.* Беседы о механике.

*Кориолис Г.* Математическая теория явлений бильярдной игры.

Серия «Физико-математическое наследие: физика (история физики)»

*Франкфурт У. И.* Очерки по истории специальной теории относительности.

*Франкфурт У. И.* Закон сохранения и превращения энергии.

По всем вопросам Вы можете обратиться к нам:  
тел./факс (499) 135-42-16, 135-42-46  
или электронной почтой [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru)  
Полный каталог изданий представлен  
в интернет-магазине: <http://URSS.ru>

Научная и учебная  
литература

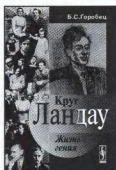
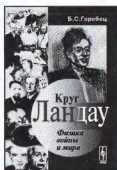
# Иван Николаевич ВЕСЕЛОВСКИЙ

(1892–1977)

механик, математик и историк науки. Родился в Москве, в семье профессора Н. Н. Веселовского. В 1916 г. закончил математическое отделение физико-математического факультета Московского университета. Несколько лет проработал инженером-исследователем в Центральном аэрогидродинамическом институте (ЦАГИ) под руководством Н. Е. Жуковского, затем в Госплане. В 1921 г. стал сотрудником Аэродинамической лаборатории Московского высшего технического училища (впоследствии им. Н. Э. Баумана). С 1925 г. и до выхода на пенсию читал курсы и вел в этом институте практические занятия по теоретической механике сначала в качестве рядового преподавателя, а позже профессора. В 1952 г. защитил докторскую диссертацию, по материалам которой вышла книга «Вавилонская математика» (1955).

И. Н. Веселовский — автор целого ряда учебных пособий и курсов по математике и теоретической механике. Основным направлением его историко-научной работы были перевод и комментирование классиков античной и средневековой науки. Им непосредственно или при его участии подготовлены издания переводов работ Евклида, Аристарха Самосского, Архимеда, Диофанта, Коперника, величайшего астрономического трактата древности — «Альмагеста» Птолемея. Также ему принадлежит ряд фундаментальных работ по истории математики, механики и астрономии: «Египетская наука и Греция» (1948), «Звездная астрономия Древнего Востока» (1963), «Египетские деканы» (1969), «Кеплер и Галилей» (1972), «Коперник и Насир ад-Дин ат Туей» (1973), «Астрономия орфиков» (опубликована посмертно в 1982 г.) и др. Он автор научно-популярных книг об Архимеде, Гюйгенсе и Копернике (последняя в соавторстве с Ю. А. Белым), по своему уровню превосходящих многие сугубо научные исследования.

## Представляем другие книги нашего издательства:



8134 ID 109110

НАУЧНАЯ И УЧЕБНАЯ ЛИТЕРАТУРА



Тел./факс: 7 (499) 135-42-16  
Тел./факс: 7 (499) 135-42-46



E-mail:  
URSS@URSS.ru  
Каталог изданий  
в Интернете:  
<http://URSS.ru>

Любые отзывы о настоящем издании, а также обнаруженные опечатки присылайте по адресу [URSS@URSS.ru](mailto:URSS@URSS.ru). Ваши замечания и предложения будут учтены и отражены на web-странице этой книги в нашем интернет-магазине <http://URSS.ru>